25.10.2011

13.8 Rette linjer i rommet

(1) En rett linje er gitt ved et punkt P, som linjen skal gå gjennom, og en vektor $\vec{v} \neq \vec{0}$ som linjen skal være parallell til.

$P_0 = (x_0, y_0, z_0)$
$\vec{v} = [a, b, c]$

punktene på linja $Q = (x, y, z)$ er gitt ved

$$\vec{OQ} = \vec{OP} + t\vec{v} \qquad t \text{ reelt tall.}$$

$$[x, y, z] = [x_0, y_0, z_0] + t[a, b, c]$$
$$= [x_0 + a\cdot t,\ y_0 + b\cdot t,\ z_0 + c\cdot t]$$

Parameter fremstilling av linjen

$$x = x_0 + a t$$
$$y = y_0 + b\cdot t$$
$$z = z_0 + c\cdot t.$$

eks

parametriser linja som går gjennom punkten: $P = (4, 2, 5)$ og $Q = (1, 4, 3)$

Linja er da parallell til vektoren

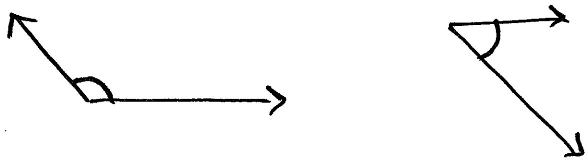
$$\vec{PQ} = [1-4,\ 4-2,\ 3-5] = [-3, 2, -2]$$

En parametrisering av linja er gitt ved

$$x = 4 + (-3)\cdot t = 4 - 3t$$
$$y = 2 + 2\cdot t = 2 + 2t$$
$$z = 5 + (-2)\cdot t = 5 - 2t$$

(2) Vinkel mellom vektorer og linjer.

$\vec{a}$ og $\vec{b}$ vektorer



 vinkelen er 0

 vinkelen mellom vektorene er 180°.

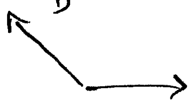
En vinkel mellom to vektorer er mellom <u>0° og 180°</u>.

En vinkel mellom to linjer er mellom 0° og 90°.

eks. $P = (2,3)$

$\vec{a} = [1,0]$ $\vec{b} = [-1,1]$.

$\vec{b}$



Vinkelen mellom $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er 135°.

Linjene gjennom P parallell til henholdsvis $\vec{a}$ og $\vec{b}$ har en vinkel på 45° mellom seg.

③

14.1 Skalar produktet

Skalarproduktet mellom to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos v$$

hvor v er vinkelen mellom $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

Skalarproduktet kalles også prikk-produktet (p.g.a. skrivemåten $\vec{a} \bullet \vec{b}$).

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0^\circ = |\vec{a}|^2$$

siden vinkelen mellom $\vec{a}$ og $\vec{a}$ er 0°.

$$\vec{a} \cdot (-\vec{a}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cos(180^\circ) = -|\vec{a}|^2$$

siden vinkelen mellom $\vec{a}$ og $(-\vec{a})$ er 180°.

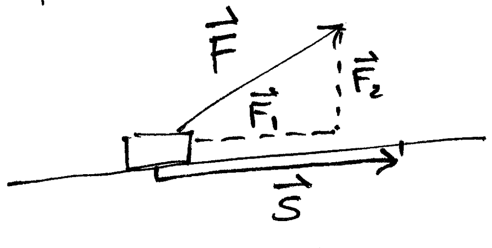
Anta $\vec{a} \neq \vec{0}$ og $\vec{b} \neq \vec{0}$. (så $|\vec{a}| \neq 0$ og $|\vec{b}| \neq 0$)

Da er $\underline{\vec{a} \cdot \vec{b} = 0} \iff |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos v = 0$

$\iff \cos v = 0 \iff \underline{v = 90^\circ}$ (når $0^\circ \leq v \leq 180^\circ$)

To vektorer (ulik nullvektoren) står vinkelrett på hverandre hvis og bare hvis skalarproduktet deres er 0.

Eksempel: Arbeid er kraft $\cdot$ veg (i retningen til bevegelsen)



Arbeide $W = |\vec{s}| \cdot |\vec{F}_1|$ (hvis $\vec{F}_1$ og $\vec{s}$ har samme retning)

$= -|\vec{s}| \cdot |\vec{F}_1|$ hvis $\vec{s}$ og $\vec{F}_1$ har motsatt retning.

$$\underline{W = \vec{F} \cdot \vec{s}}$$

(4) Gitt to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ slik at

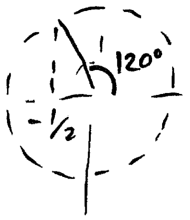
$|\vec{a}| = 2$ $\quad$ $|\vec{b}| = 5$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = -5$

Hva er vinkelen V mellom $\vec{a}$ og $\vec{b}$?

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos V$$

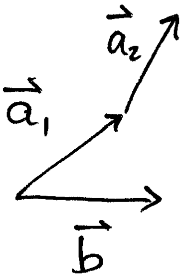
$$\cos V = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{-5}{2 \cdot 5} = \frac{-1}{2}$$



Vinkelen er da <u>120°</u>

⑤ 14.2-4 Koordinatform til skalarproduktet.

* $(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \cdot \vec{b} = \vec{a}_1 \cdot \vec{b} + \vec{a}_2 \cdot \vec{b}$



* $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

(Derfor har vi) * $\vec{a} \cdot (\vec{b}_1 + \vec{b}_2) = \vec{a} \cdot \vec{b}_1 + \vec{a} \cdot \vec{b}_2$.

* $(t\vec{a}) \cdot \vec{b} = t(\vec{a} \cdot \vec{b})$

* $\vec{a} \cdot (s\vec{b}) = s(\vec{a} \cdot \vec{b})$

Skalarproduktet $\vec{a} \cdot \vec{b}$ er lineært i $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

Gitt tre vektorer $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \qquad \vec{b} \cdot \vec{c} = -1, \quad |\vec{b}| = 4.$

Da er

$$(\vec{a} + \vec{c} + \vec{b}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} + \underbrace{\vec{c} \cdot \vec{b}}_{\vec{b} \cdot \vec{c}} + \underbrace{\vec{b} \cdot \vec{b}}_{|\vec{b}|^2}$$

$$= 2 - 1 + 4^2 = \underline{\underline{17}}$$

6

$$[x_1, y_1] \cdot [x_2, y_2] = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$$

Eksempel $\vec{a} = [1, 2]$, $\vec{b} = [-3, 4]$

a) Hva er skalarproduktet $\vec{a} \cdot \vec{b}$

b) Hva er vinkelen mellom $\vec{a}$ og $\vec{b}$

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = [1, 2] \cdot [-3, 4] = 1 \cdot (-3) + 2 \cdot 4 = \underline{\underline{5}}$

b) $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \, |\vec{b}| \cdot \cos v$ v vinkelen mellom $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

$$\cos v = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$= \frac{5}{\sqrt{5}\sqrt{(-3)^2 + 4^2}} = \frac{5}{\sqrt{5} \cdot 5} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Dette gir $\underline{v = 63.43\ldots^\circ}$

Prikkprodukt for vektorer i rommet:

$$[x_1, y_1, z_1] \cdot [x_2, y_2, z_2] = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2.$$

Eksempel $\vec{a} = [5, 4, -7]$, $\vec{b} = [1, 2, 3]$.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 5 + 8 - 21 = -8$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{5^2 + 4^2 + (-7)^2} = \sqrt{25 + 16 + 49} = \sqrt{90}$$

$$= \underline{3\sqrt{10}}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14}$$

$$\cos v = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{-8}{3\sqrt{10} \cdot \sqrt{14}} = -0.225\ldots$$

$$\underline{v = 103.0\ldots^\circ}$$

⑦ $\vec{a} = [s, 2, -s+1]$ parametrisert vektor

$\vec{b} = [1, 2, 3]$

For hvilke verdier s er $\vec{a}$ og $\vec{b}$ vinkelrett på hverandre?

Det skjer hvis og bare hvis $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ ($\vec{a} \neq \vec{0}$ for alle s, $\vec{b} \neq \vec{0}$)

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = s \cdot 1 + 2 \cdot 2 + (-s+1) \cdot 3$$

$$= s + 4 - 3s + 3 = -2s + 7.$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \iff 0 = -2s + 7$$

$$2s = 7$$

$$\underline{\underline{s = 7/2}}$$

Vektorene $\vec{a}$ og $\vec{b}$ står vinkelrett på hverandre når $\underline{\underline{s = 7/2}}$

⑧ Bevis for koordinatformen av skalarproduktet

$[x_1, y_1] = x_1\vec{e_1} + y_1\vec{e_2}$

$\vec{e_1}\cdot\vec{e_2} = 0$ siden de står vinkelrett på hverandre

$\vec{e_1}\cdot\vec{e_1} = |\vec{e_1}|^2 = 1$ $\vec{e_2}\cdot\vec{e_2} = |\vec{e_2}|^2 = 1$

$[x_1, y_1]\cdot[x_2, y_2]$

$= (x_1\vec{e_1} + y_1\vec{e_2})\cdot(x_2\vec{e_1} + y_2\vec{e_2})$

$= x_1\cdot x_2(\vec{e_1}\cdot\vec{e_1}) + x_1y_2(\vec{e_1}\cdot\vec{e_2}) + y_1x_2(\vec{e_2}\cdot\vec{e_1})$

$+ y_1y_2(\vec{e_2}\cdot\vec{e_2})$

$= x_1\cdot x_2 + y_1\cdot y_2$

Helt tilsvarende for vektorer i rommet.