24.10.2011

Komentarer til Obligatorisk oppg 2.

1

Symbolet $\Leftrightarrow$ betyr ekvivalent (til)
(Det brukes gjerne i stede for "hvis og bare hvis".)

$$a \cdot b = 0 \iff a = 0 \text{ eller } b = 0.$$

$$\sin(x+1) \cdot \cos x = 0 \qquad 0 \leq x < 2\pi.$$

$$\Updownarrow$$

$$\sin(x+1) = 0 \text{ eller } \cos x = 0$$

$\cos x = 0$: $\underline{x = \frac{\pi}{2}}$ og $\underline{\frac{3\pi}{2}}$

$\sin(x+1) = 0$ $\qquad x+1 = 0 + 2\pi \cdot n$
$\qquad\qquad\qquad\qquad = \pi + 2\pi \cdot n$

Gir løsningene $\underline{\pi - 1}$ og $\underline{2\pi - 1}$

Løsningene er $\underline{x \in \left\{\frac{\pi}{2}, \pi - 1, \frac{3\pi}{2}, 2\pi - 1\right\}}$

Hvis $c > 0$ da er $a < b \iff a \cdot c < b \cdot c$

Hvis $c < 0$ da er $a < b \iff a \cdot c > b \cdot c$

"å gange en ulikhet med et negativt tall snur ulikheten"

eks: $x^2 < x$

$x > 0$: deler med x : $x < 1$, løsningene er $0 < x < 1$

a) $x < 0$: deler med x : $x > 1$, ingen løsninger

$x = 0$: $\cancel{0 < 0}$ så $x = 0$ er ikke en løsning.

Løsningene er $\underline{0 < x < 1}$

b) Alternativt.

(2) $x^2 < x \iff \underbrace{x^2 - x}_{x(x-1)} < 0$

Bruke fortegnsskjema for $x(x-1)$ til å løse oppgaven.

Anta $a, b > 0$

$b > a \iff b^2 > a^2$.

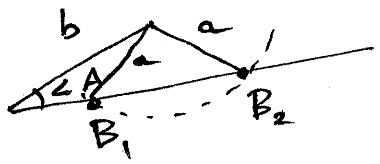
Bevis $b^2 > a^2 \iff b^2 - a^2 > 0 \iff$

$(b+a)(b-a) > 0$ ($b+a > 0$ siden $a > 0$ og $b > 0$)

$\iff b - a > 0 \iff b > a$.

(Kan brukes i oppg 7. ...)

Anta $\angle A$, b, a er oppgitt.



to løsninger.

---

oppg 6 Buelengde = areal

$v \cdot r = \frac{v}{2} \cdot r^2$

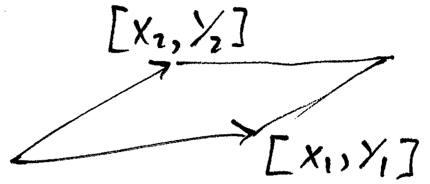
$v \cdot r\left(1 - \frac{r}{2}\right) = 0. \iff v = 0,\ r = 0,\ r = 2.$

$r = 2$ og alle mulige v.

$v = 0$ og alle mulige r.

③ 13.6 Determinanter

$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$. determinanten



Arealet til parallellogramet er

$$\left| \det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix} \right|$$

Et parallellogram har koordinater

$A = (1,2)$, $B = (3,3)$ og $D = (2,4)$.

Hva er arealet?

$\vec{AB} = [2, 1]$, $\vec{AD} = [1, 2]$.

Arealet er : $\left| \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \right| = |1 \cdot 1 - 2 \cdot 2|$

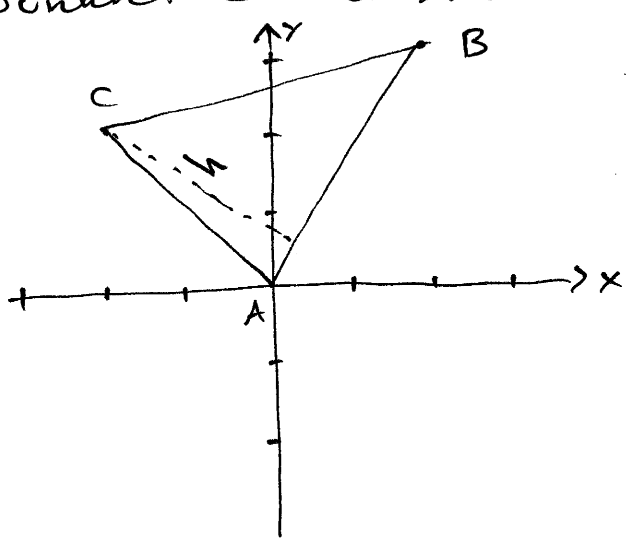
$= ||1-4|| = |-3| = \underline{\underline{3}}$

I en trekant ABC er $\vec{AB} = [2, 3]$
$\vec{AC} = [-2, 2]$

1) Hva er arealet til ΔABC?

2) Hva er avstanden fra punktet C til ~~siden~~ linja som utvider AB?

3) Hva er vinkel $\angle A$?



(4) 1) Arealet er $\frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\right|$

$$= \frac{1}{2}\left| 2^2 - (-2)\cdot 3 \right| = \frac{1}{2}|4+6| = \underline{5}$$

2) Arealet er også lik $\frac{1}{2}h \cdot |\vec{AB}|$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13}$$

Derfor er avstanden fra C (punktet) til c (linja) er

$$\frac{1}{2}\cdot h \cdot \sqrt{13} = 5$$

$$h = \frac{10}{\sqrt{13}} \sim 2.7735\ldots$$

3) $|\vec{AC}|\cdot \sin(\angle A) = h$

$$|\vec{AC}| = 2\sqrt{2}.$$

$$\sin(\angle A) = \frac{h}{2\sqrt{2}} \sim 0.9805\ldots$$

Dette gir $\angle A = 78.69°$ eller $101.31°$.

Fra figuren ser det ut til at

$$\underline{\underline{\angle A = 78.69°}}$$

Det er mer naturlig å bruke cosinussetningen (eller skalarprodukt) for å finne $\angle A$.

13.7 Linjer i planet.

En linje er bestemt av et punkt $P = (x_0, y_0)$ som ligger på linjen og en vektor $\vec{v} = [a, b] \neq \vec{0}$ som er parallell til linja.

Punktene (x, y) på linja er alle

$$\overrightarrow{O(x,y)} = \overrightarrow{O(x_0, y_0)} + t[a,b]$$

$t \in \mathbb{R}$ reelt tall.

Koordinatvis:

$$x = x_0 + a \cdot t$$
$$y = y_0 + b \cdot t \qquad t \in \mathbb{R}$$

Dette kalles en parameterfremstilling av linjen.

Eks. Anta at linjen L er parametrisert ved

$$x = 2 - 3t$$
$$y = -1 + 9t.$$

Finn et punkt på linjen og en vektor parallell til linjen.

For eksempel $(2, -1)$ ligger på linja $(t=0)$
(det gjør også $(-1, 8)$ $t=1$ etc.)

En vektor parallell til L er $\vec{v} = [-3, 9]$

en ann slik vektor er $-\frac{1}{3}\vec{v} = [1, -3]$

(6) Finn skjæringspunktet til linjene

L_1 $\quad x_1 = 2 - t$
$\quad\quad y_1 = 3 + 2t$

L_2 $\quad x_2 = 3 + s$
$\quad\quad y_2 = -2 + s$

I skjæringspunktet er $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$

1) $x_1 = x_2$ $\qquad 2 - t = 3 + s$

2) $y_1 = y_2$ $\qquad 3 + 2t = -2 + s$

Likning 2) gir at $s = 5 + 2t$

Setter dette inn i likning 1)

$$2 - t = 3 + (5 + 2t)$$

$$2 - 3 - 5 = t + 2t$$

$$-6 = 3t \qquad \text{så } \underline{t = -2}$$

Setter dette inn i parametriseringen for L_1:

$$(x, y) = (2 - (-2),\ 3 + 2(-2))$$

$$= \underline{\underline{(4, -1)}}$$

(7) Finn skjæringspunktet til linjene:

L_1: går gjennom $(1, -1/3)$ og er er parallell til $\vec{v} = [2, 3]$.

(parameter fremstilling av L_1 $\quad x = 1 + 2s$, $\quad y = \frac{-1}{3} + 3s$)

L_2: er parametrisert ved $x = -1 + \frac{t}{2}$
$y = 2 - t$.

(En vektor parallell til L_2 er $[\frac{1}{2}, -1]$
så er også $[1, -2]$)

Linje 1 og linje 2 møtes når

$1 + 2s = -1 + \frac{t}{2}$ og $\frac{-1}{3} + 3s = 2 - t$

$(2 + 2s = t/2) \cdot 2$

$4 + 4s = t$

setter $t = 4 + 4s$ inn i likningen og løser for s.

$\frac{-1}{3} + 3s = 2 - 4 - 4s$

$3s + 4s = -2 + \frac{1}{3}$

$7 \cdot s = \frac{-5}{3}$

$s = \frac{-5}{21}$

setter dette inn i parametriseringen for Linje 1:

$(x, y) = \left(1 - \frac{10}{21}, \frac{-1}{3} + 3\left(\frac{-5}{21}\right)\right)$

$= \left(\frac{11}{21}, \frac{-7}{21} + \frac{-15}{21}\right)$

$= \underline{\underline{\left(\frac{11}{21}, \frac{-22}{21}\right)}}$ er skjæringspunktet.

8 Linjer kan også beskrives som løsningen til en likning på formen

$$ax + by + c = 0.$$

(Linja består av alle punkt (x, y) slik at x og y tilfredsstiller likningen.)

$a = 0,\ b \neq 0$: $by = -c$

$$\underline{y = -c/b}$$

horisontal linje

$b = 0,\ a \neq 0$: $ax = -c$

$$x = \frac{-c}{a}$$

vertikal linje.

Hvis $b \neq 0$: $by = -ax - c$

$$y = \left(-\frac{a}{b}\right) \cdot x + \left(-\frac{c}{b}\right)$$

$\underline{y = dx + e}$ d stigningstallet til linja
e skjæringspunktet på y-aksen.

Finn en likning som beskriver linjen parametrisert som

$$x = 2t - 1$$
$$y = -5t + 2 \qquad t \in \mathbb{R}$$

$$5x + 2y = (10t - 5) - 10t + 4$$
$$= -1 \quad \text{for alle } t.$$

Likningen er $\underline{5x + 2y + 1 = 0}$