Torsdag 23april 09 Differensiallikninger

Et uttrykk som relaterer en eller flere deriverte av en funksjon $y(x)$ til y og x kalles en differensiallikning

Eks

1) $y' = g(x)$

2) $y' = ky$ k konstant
eksponentiell vekst

3) $y' = a$ linje m. stigningstall a

$y'' = 0$

4) $y'' + k^2 \cdot y = 0$ Harmonisk bevegelse

5) $y'' + ay' + by = 0$

6) $(y')^2 = 4y$

7) $y \cdot y' = 1$

En diff. likning sies å være av orden n hvis den inneholder n-te deriverte av y

$y^{(n)}_{(x)} = \frac{d^n}{dx^n} y$ men ingen høyere ordens deriverte

Løsningene til en diff. likning er en funksjon $Y(x)$ slik at diff. likningen holder for alle x (i en intervall)

Det er typisk flere mulige løsninger til en diff. likning.

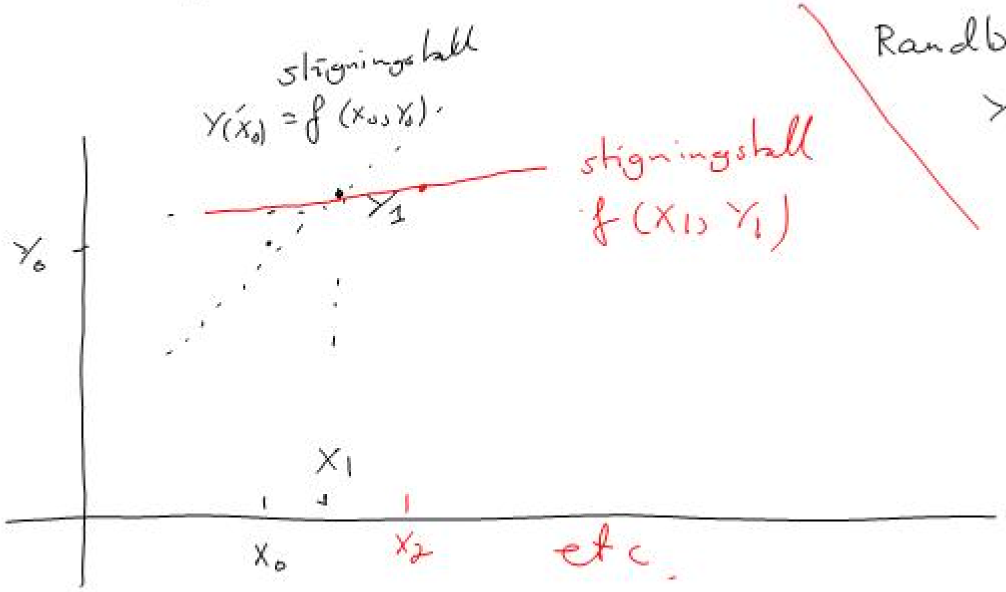
En n-te ordens diff. likning vil typisk ha n frihetsgrader (parametrer som bestemmer ulike løsninger).

Betingelser på $Y(x)$ som gir en unik løsning av en diff. likning kalles randbetingelser (eller initialbetingelser).

En metoda for å finne tilnærmet løsning til en diff. likning på formen $Y' = f(x,Y)$

Randbetingelse: (x_0, Y_0)

$Y_0 = Y(x_0)$



Løsning til noen av diff. likningene.

$y' = g(x)$

En løsning er en antiderivert $G(x)$ til $g(x)$.

Alle mulige løsninger er på formen

$G(X) + C$, c konstant.

2) $y' = ky$ k konstant

Løsningene: $y = a \cdot e^{kx}$ a konstant

$(y' = a(e^{kx})' = a \cdot k \cdot e^{kx} = k \cdot y)$

Systematisk løsningsmetode: Prøver å isolere x og y på hver side av likhetstegnet.

$$\frac{y'}{y} = \frac{ky}{y} = k$$

$$\underbrace{\int \frac{y'}{y} dx}_{\text{substitusjon}} = \int k \, dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int k \, dx$$

$$e^{\ln|y|} = e^{(k \cdot x + c)}$$

$$|y| = e^{k \cdot x} \cdot e^{c}$$

$$y = (\pm e^{c}) \cdot e^{k \cdot x}$$

$y \equiv 0$ er også en løsning.

Vi oppsumerer: $y = a \cdot e^{kx}$

hvor a er en konstant (reelt tall)

3) $y' = a$

$\int y' dx = \int a \, dx$

$y = ax + c$

$y'' = 0$

$(y')' = 0$

Fra første del av 3) med $a = 0$

$y' = c$

Dette gir $y = c \cdot x + d$ for konstanter c og d.

Det er 2 parametre c, d som beskriver løsningene fordi diff. likningen $y'' = 0$ er av orden 2.

4) $y'' + k^2 y = 0$

Løsningene er $y(x) = a \cdot \cos kx + b \cdot \sin kx$

for konstanter a, b.

5) $y'' + ay' + by = 0$

6) $(y')^2 = 4y$

$y \geq 0$

$y' = \pm\sqrt{4y} = \pm 2\sqrt{y}$ deler med $\sqrt{y}$

$\frac{y'}{\sqrt{y}} = \pm 2$ separert diff likningen

$\int \frac{dy}{y^{1/2}} = \int \pm 2\, dx$

$2y^{1/2} = \pm 2x + c$

$y^{1/2} = \pm x + c$ (egentlig $c/2$)

$y = (\pm x + c)^2$

$= (x \mp c)^2$

Løsningene er $y = (x + c)^2$

for en konstant c

7) $y \cdot y' = 1$ $\quad$ $g(y) = y$, $f(x) = 1$

$$\int y \, dy = \int 1 \, dx$$

$$\frac{y^2}{2} = x + C \qquad \text{løser for } y$$

$$\underline{y = \pm\sqrt{2x + c}}$$

Vi fokuserer på separable 1. ordens diff likninger.

Det er diff likninger som kan skrives

på formen $y' \cdot g(y) = f(x)$.

Løsningsmetode:

$$\int g(y)\, y' \, dx = \int f(x) \, dx$$

(substitusjon)

$$\int g(y) \, dy = \int f(x) \, dx$$

Løs integralene (bestemt opp til en konstant)

$$G(y) = F(x) + C$$

antiderivert til $g(y)$ $\qquad$ antiderivert til $f(x)$

Eventuelt løs for $y(x)$.

[I praksis: $\quad g(y) \dfrac{dy}{dx} = f(x)$

$$\int g(y) \, dy = \int f(x) \, dx$$

integrer.]

Eksempel $\quad y' = e^y \sin x$

deler med e^y:

$$y' \cdot e^{-y} = \sin x$$

$$\int e^{-y} \frac{dy}{dx}\, dx = \int \sin x \, dx$$

$$\int e^{-y} dy = \int \sin x \, dx$$

$$-e^{-y} = -\cos x + C$$

$$\ln(e^{-y}) = \ln(\cos x - c)$$

$$-y = \ln(\cos x - c)$$

$$\underline{y = -\ln(\cos x - c)}$$

Oppgave $\quad$ Løs diff likningen

$$y' = -\frac{x}{y}.$$

Hva er grafen til løsningene?

$$y \cdot y' = -x \qquad y \frac{dy}{dx} = -x$$

$$\int y \, dy = \int (-x)\, dx$$

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + c$$

$$y^2 + x^2 = C \quad (\text{egentlig } 2c)$$

$c < 0$ ingen (reell) løsning

$c = 0$ (punkt $(0,0)$)

$c > 0$ sirkel med radius $\sqrt{c}$

$$\underline{y = \pm\sqrt{c - x^2}}$$

oppgave Løs diff. likningen

$$y'(x^2-1) = \frac{x}{y^4-1}$$

$$(y^4-1)\cdot y' = \frac{x}{x^2-1}$$

$$\int (y^4-1)\,dy = \int \frac{x}{x^2-1}\,dx$$

delbrøksoppspalting gir

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}\,dx$$

$$\frac{y^5}{5} - y = \frac{1}{2}\left(\ln|x-1| + \ln|x+1|\right) + c$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2-1| + c$$

(alternativt bruk substitusjon med $u = x^2-1$
$u' = 2x$)

$$\frac{y^5}{5} - y = \frac{1}{2}\ln|x^2-1| + c$$

Dette gir en implisitt løsningsfamilie for y.