Eksponentialfunksjonen

$$f(x) = e^x \qquad \text{og funksjonane } a^x, \quad a > 0 \quad (a \neq 1)$$

Avgrenser oss til

$\Big(1^x = 1$ for alle x

$a<0 \qquad (-1)^{1/2}$ ikke et reelt tall $\Big)$

$$a^x = \left(\left(\frac{1}{a}\right)^{-1}\right)^x = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x}$$

$$\left(\frac{1}{e}\right)^x = e^{-x}$$

Grafen til e^{-x} er lik grafen til e^x reflektert rundt Y-aksen.

Den deriverte til e^x er e^x

$$(e^x)' = e^x$$

$$(e^x)' = \lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^x(e^h - 1)}{h}$$

(Benyttet: $e^{x+h} = e^x \cdot e^h$)

$$(e^x)' = e^x \underbrace{\lim_{h \to 0} \left(\frac{e^h - 1}{h}\right)}_{\substack{\text{uavhengig av } x \\ \text{tallverdi hvis grensen} \\ \text{eksisterer.}}}$$

Tegner grafen til $\frac{e^h - 1}{h}$ og ser at

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1.$$

Derfor er $\underline{(e^x)' = e^x \cdot 1 = e^x}$

Påstand: $\underline{(a^x)' = \ln a \cdot a^x}$

$$a = e^{\ln a} \qquad a > 0$$

$$a^x = (e^{\ln a})^x = e^{\ln a \cdot x}$$

La $u = \ln a \cdot x$ $\qquad u' = \ln a$

$$\frac{d}{dx}(a^x) = \frac{d}{dx}\left(e^{(\ln a \cdot x)}\right) = \frac{d}{du}(e^u) \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= (e^u)' \, u' \qquad \text{(alternativ notasjon)}$$

$$= e^u \cdot \ln a = e^{\ln a \cdot x} \cdot \ln a$$

$$= a^x \cdot \ln a$$

$$(a^x)' = \underline{\ln a \cdot a^x}$$

eks.

$$(2^x)' = \ln 2 \cdot 2^x$$

$$(0.693\ldots) \cdot 2^x$$

$$(e^{-x})' = \ln\left(\frac{1}{e}\right) \cdot e^{-x}$$

$$= -e^{-x}$$

$$\left(\left(\frac{1}{2}\right)^x\right)' = (2^{-x})' = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \cdot 2^{-x}$$

$$= -\ln 2 \cdot 2^{-x}$$

$$= -(0.693\ldots) \cdot 2^{-x}$$

$a = 1$ $\qquad a^x = 1^x = 1$ for alle x

Grafen til a^x er en horisontal linje.

$$(1^x)' = \ln(1) \cdot 1^x = 0 \cdot 1 = 0 \text{ (for alle } x\text{)}$$

La $u(x)$ være en deriverbar funksjon.

$$\left(e^{u(x)}\right)' = u'(x) \cdot e^{u(x)}$$

Dette følger fra kjerneregelen.

Eksempler

Gauss kurven $\quad f(x) = e^{-x^2}$ $\quad$ (viktig i statistikk)

$$\left(e^{-x^2}\right)' = (-x^2)' e^{-x^2}$$
$$= \underline{-2x\, e^{-x^2}}$$

Hva er vendepunktene til Gausskurven.

$$\left(e^{-x^2}\right)'' = \left(\left(e^{-x^2}\right)'\right)'$$
$$= \left(-2x\, e^{-x^2}\right)'$$
$$= (-2x)' e^{-x^2} + (-2x)\cdot\left(e^{-x^2}\right)' \qquad \text{produkt-regelen}$$
$$= -2e^{-x^2} + (-2x)\left(-2x\, e^{-x^2}\right)$$

$$f''(x) = 2e^{-x^2}\left[2x^2 - 1\right]$$

$$f''(x) = 0 \iff 2x^2 - 1 = 0$$
$$\iff 2x^2 = 1 \iff x^2 = \frac{1}{2}$$

$f''(x) = 0$ hvis og bare hvis $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

eller $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Vendepunktene er $\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, f\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)\right) = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, e^{-1/2}\right)$

$$= \underline{\underline{\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)}}$$

og $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) = \underline{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)}$

* $(e^{x+1})' = (x+1)' \cdot e^{x+1}$

$= 1 \cdot e^{x+1} = e^{x+1}$

* $(e^{-2x})' = (-2x)' \cdot e^{-2x}$

$= \underline{-2e^{-2x}}$

* $(x \cdot e^x - e^x)' = (x \cdot e^x)' - (e^x)'$

$= (x)' e^x + x \cdot (e^x)' - e^x$

$= 1 \underbrace{e^x + x \cdot e^x - e^x}$

$= \underline{x \cdot e^x}.$

* $e^{\ln x} = x \qquad (x > 0)$

kjernen

$(e^{\ln x})' = (\ln x)' \cdot e^{\ln x}$

$= \frac{1}{x} \cdot x = 1$

Alternativt $(e^{\ln x})' = (x)' = 1.$

Oppg. 11.74

Finn topp og bunnpunkt samt vendepunkt for $f(x) = x e^{-x}$ $\quad x \in [0, 3]$

$$f'(x) = (x \cdot e^{-x})' = (x)' e^{-x} + x \cdot (e^{-x})'$$

$$= e^{-x} + x(-e^{-x}) = e^{-x}(1-x).$$

$f'(x) = 0$ når $x = 1$.

Fortegn til $f'(x)$:

0 1 2 3

$+ + + - - - - - -$

Toppunkt (globalt) til $f(x)$ i $\left(1, \frac{1}{e}\right)$.

Globalt bunnpunkt i $(0, 0)$

lokalt bunnpunkt $\left(3, \frac{3}{e^3}\right)$.

$$f''(x) = (e^{-x} - x e^{-x})' = (e^{-x})' - (\overbrace{x e^{-x}}^{f(x)})'$$

$$= -e^{-x} - e^{-x}(1-x)$$

$$= e^{-x}(-1 - (1-x))$$

$$= e^{-x}(-1 - 1 + x)$$

$$f''(x) = \underline{e^{-x}(x-2)}$$

$f''(x) = 0$ når $x = 2$

Vendepunkt i $\underline{\left(2, \frac{2}{e^2}\right)}$

Skisse av grafen