Logaritme funksjonen

$f(x) = \ln x$

Definisjonsmengden $D_f = \langle 0, \infty \rangle$

Verdimengden $V_f = \mathbb{R}$

$e^{\ln x} = x \qquad x > 0$

$\ln e^y = y \qquad y \in \mathbb{R}$ (y reelt tall)

Egenskaper til $\ln x$.

$$\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y$$

$$\ln(x^r) = r \cdot \ln x$$

$$\ln 1 = 0$$

$r = -1$: $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = \ln(x^{-1}) = -1 \cdot \ln x$

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$$

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) = \ln x + \ln\left(\frac{1}{y}\right)$$

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$$

Eksempler $\qquad 3^x = 4$

Ta logaritmen av begge sider

$$\ln 3^x = \ln 4$$

$$x \cdot \ln 3 = \ln 4$$

$$x = \frac{\ln 4}{\ln 3}$$

Resultat $\qquad \underline{\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}}$

Skissere et bevis:

Husk at $\quad e = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{t\to 0^+} (1+t)^{1/t}$

$\left(t = \frac{1}{n}\right) \qquad \left(= \lim_{t\to 0^-} (1+t)^{1/t} \right)$

$$\frac{d}{dx} \ln x = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \ln\left(\frac{x+h}{x}\right) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \ln\left(1+\frac{h}{x}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{x}{h}\right) \ln\left(1+\frac{h}{x}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{x} \ln\left(\left(1+\frac{h}{x}\right)^{x/h}\right) \qquad \frac{h}{x} = t$$

$$\frac{x}{h} = \frac{1}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{x} \ln (1+t)^{1/t}$$

ln er en kontinuerlig funksjon

så vi kan ta grensen innforbi ln-funksjonen

$$\underline{\frac{d}{dx} \ln x} = \frac{1}{x} \ln \lim_{t\to 0} (1+t)^{1/t} = \frac{1}{x} \cdot \ln \underbrace{e}_{1} = \underline{\frac{1}{x}}$$

Logaritme med base $a > 1$

$$a^{\text{Log}_a x} = x \qquad x > 0.$$

$$\text{Log}_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

$$\frac{d}{dx} \text{Log}_a x = \frac{d}{dx} \frac{1}{\ln a} \cdot \ln x$$

$$= \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x \cdot \ln a}$$

$$(\ln a \cdot \text{Log}_a e = 1)$$

$$\frac{d}{dx} \text{Log}_a x = \frac{1}{\ln a \cdot x} = \frac{\text{Log}_a e}{x}$$

$a = 10$ $$\frac{d}{dx} \text{Log}\, x = \frac{1}{\ln 10 \cdot x} = \frac{\text{Log}\, e}{x}$$

$x < 0$ da er $-x > 0$ så $\ln(-x)$ er definert for $x < 0$.

$$\frac{d}{dx} \ln(-x)$$

Bruker kjerneregelen med kjerne $u = -x$

$$\frac{d}{dx} \ln(-x) = \frac{d \ln(u)}{du} \cdot \frac{du}{dx} = (\ln u)' \cdot u'(x)$$

$$= \frac{1}{u} \cdot (-1) = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}$$

så $\frac{d}{dx} \ln(-x) = \frac{1}{x}$ $\qquad x < 0$

$$|x| = \begin{cases} x & x>0 \\ -x & x<0 \end{cases}$$

$\ln|x|$ definert for $x \neq 0$

$$\frac{d}{dx} \ln|x| = \frac{1}{x} \qquad x \neq 0.$$

Viktige egenskapen til derivasjon

* Derivasjon er lineær $(a \cdot f(x) + b \cdot g(x))'$

$$= a \cdot f'(x) + b \cdot g'(x)$$

hvor a og b er konstanter

* Produktregelen: $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

* Kjerneregelen $(f(u(x)))' = f'(u(x)) \cdot u'(x)$

alternativ notasjon $\frac{d}{dx} f(u(x)) = \frac{df(u(x))}{du} \cdot \frac{du(x)}{dx}$

$$\frac{d}{dx} x^r = r \cdot x^{r-1} \qquad r \text{ reelt tall}$$

$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x, \qquad \frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$$

$$\frac{d}{dx} \ln|x| = \frac{1}{x} \qquad \left(\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x} \right)$$

Eksempler 1) Kjerneregeln

$$\frac{d}{dx}\ln(\overbrace{2x-1}^{u(x)}) = \frac{d\ln u}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

$$= \frac{1}{u}\cdot 2 = \frac{2}{2x-1} \qquad x > \frac{1}{2}$$

2) $f(x) = \ln(x^5) = 5\ln x$

$$\frac{d}{dx}f(x) = 5\cdot\frac{d}{dx}\ln x = \frac{5}{x}.$$

Alternativt: Bruker kjerneregelen $\ln(\underbrace{x^5}_{u})$

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d\ln u}{du}\cdot\frac{du}{dx} = \frac{1}{u}\cdot 5x^4$$

$$= \frac{5x^4}{x^5} = \underline{\frac{5}{x}}$$

3) $f(x) = (\ln x)^3$

$$u = \ln x \qquad g(u) = u^3$$

$$(\ln x)^3 = g(u(x)).$$

$$((\ln x)^3)' = g'(u(x))\cdot u'(x)$$

$$= 3\cdot u^2\cdot\frac{1}{x}$$

$$= \underline{\frac{3(\ln x)^2}{x}}$$

4) $\cos(\ln x)$ sammensatt funksjon

$$\frac{d}{dx}\cos(\overbrace{\ln x}^{u}) = \frac{d}{du}\cos(u)\cdot\frac{du}{dx}$$

$$= -\sin(u)\cdot\frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx}\cos(\ln x) = \underline{-\frac{\sin(\ln x)}{x}}$$

5) $f(x) = \ln(x^4+1) + \sin x$

$f'(x) = (\ln\underbrace{(x^4+1)}_{u})' + (\sin x)'$

bruker kjerneregelen

$= \left(\frac{1}{x^4+1}\right) \cdot 4x^3 + \cos x$

$f'(x) = \frac{4x^3}{x^4+1} + \cos x$

Mer detaljer: $\ln(x^4+1) = \ln u$

hvor $u = x^4+1$, $u' = 4x^3$

$\frac{d}{dx}(\ln(x^4+1)) = \frac{d\ln u}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ kjerneregelen

$= \frac{1}{u} \cdot (4x^3)$

$= \underline{\frac{4x^3}{x^4+1}}$

6) $f(x) = x \cdot \ln|x| - x$ $\quad x \neq 0$

$f'(x) = (x)' \cdot \ln|x| + x \cdot (\ln|x|)' - (x)'$

(produktregelen)

$= 1 \cdot \ln|x| + x \cdot \frac{1}{x} - 1$

$= \ln|x| + 1 - 1$

$= \underline{\ln|x|}$

7) La $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ $\quad x > 0$

- Finn toppunktet til $f(x)$.

$f'(x) = \left(\dfrac{\ln x}{x}\right)'$

Kvotientregel $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - u\cdot v'}{v^2}$

($\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \left(u \cdot \dfrac{1}{v}\right)' = (u \cdot v^{-1})'$ produktregelen

kjerneregel på v^{-1}

$= u'(v^{-1}) + u\cdot(v^{-1})'$

$= \dfrac{u'}{v} + u \cdot (-1 \cdot v^{-2}) \cdot v'$

$= \dfrac{u'}{v} - \dfrac{u\cdot v'}{v^2}$ felles nevner

$= \dfrac{u'\cdot v - u\cdot v'}{v^2}$)

[$\left(\dfrac{1}{v(x)}\right)' = (v(x)^{-1})' = \dfrac{d}{dv}(v^{-1}) \cdot \dfrac{dv}{dx}$

$= \dfrac{-1}{v^2}\dfrac{dv}{dx}$

så $\left(\dfrac{1}{v(x)}\right)' = \dfrac{-v'(x)}{v^2}$]

$f'(x) = \left(\dfrac{\ln x}{x}\right)' = \dfrac{(\ln x)'\cdot x - (\ln x)\cdot(x)'}{x^2}$

$= \dfrac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \underline{\dfrac{1 - \ln x}{x^2}}$

$f'(x) = 0$ når $1 - \ln x = 0$

$1 = \ln x$

$e^1 = e^{\ln x} = x$

så $\underline{x = e}$

ser av grafen at vi
har et globalt toppunkt når $x = e$

toppunktet er $(e, \frac{\ln e}{e}) = \underline{(e, \frac{1}{e})}$

8) $f(x) = \ln|x^2 + 2x - 3|$

1) Finn største def. mengde til f

2) Finn $f'(x)$

1) $\ln u$ er definert for $u > 0$
og ikke definert for $u \leq 0$.

Derfor er $f(x)$ definert når

$|x^2 + 2x - 3| > 0$ (polynomer er def. for alle x).

$|x^2 + 2x - 3| > 0 \iff x^2 + 2x - 3 \neq 0$.

Vi finner x hvor f ikke er definert: $x^2 + 2x - 3 = 0$.

$\underbrace{x^2 + 2x + 1}_{(x+1)^2} - 3 - 1 = 0$

$(x+1)^2 = 4$

$x + 1 = \pm 2$

$x = -1 \pm 2$

så $f(x)$ er definert for alle reelle tall
forskjellig fra $\underline{x = -3}$ og $\underline{x = +1}$

(Merk at $\ln(x^2+2x-3)$ er def. for
$x < -3$ og for $x > 1$)

del 2) $\left(\ln|\overbrace{x^2+2x-3}^{u}|\right)'$

$= \left(\ln|u(x)|\right)' = \left(\ln|u|\right)' \cdot u'(x)$

$= \frac{1}{u} \cdot (x^2+2x-3)' = \frac{2x+2}{x^2+2x-3}$

$$\left(\ln(u(x))\right)' = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\ln|u(x)|\right)' = \frac{u'(x)}{u(x)}$$