Torsdag 22 januar 09 Produktregelen 8.9

Produktregelen:

Hvis f og g er deriverbare i x så er $f \cdot g$ deriverbar i x og $(f \cdot g)'(x) = f'(x)\,g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.

Produktfunksjonen $f \overset{\cdot\ (\text{prikk})}{\cdot} g$ er gitt ved $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

Sammensatt funksjon $f \overset{\text{sirkel/ring}}{\circ} g$ er gitt ved $f \circ g\,(x) = f(g(x))$

Merk at deriverbar $\Rightarrow$ kontinuerlig.

$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ eksisterer $\Rightarrow$ $\lim_{h \to 0} f(x+h) - f(x) = 0$.

d.v.s. $\lim_{h \to 0} f(x+h) = f(x)$

Bevis for produktregelen:

$$(f \cdot g)'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)\,g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)\,g(x+h) \overbrace{- f(x+h)\,g(x) + f(x+h)\,g(x)}^{0} - f(x)\,g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)\left[g(x+h) - g(x)\right] + g(x)\left[f(x+h) - f(x)\right]}{h}$$

(Vi bruker grenseverdisetningene

$$= \lim_{h \to 0} f(x+h) \cdot \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + g(x) \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x)$$

Vi har nå bevist produktregelen.

Eksempel 1) $f(x) = x^2\sqrt{x}$ $(= x^{5/2})$

Vi regner ut $f'(x)$ ved å bruke produktregelen på $x^2 \cdot \sqrt{x}$.

$$(x^2 \cdot \sqrt{x})' = (x^2)' \cdot \sqrt{x} + x^2 \cdot (\sqrt{x})'$$

$$= 2x \cdot \sqrt{x} + x^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad (x>0)$$

$$= 2x \cdot \sqrt{x} + \frac{1}{2} x \cdot \frac{x}{\sqrt{x}} = 2x \cdot \sqrt{x} + \frac{1}{2} x \cdot \sqrt{x}$$

$$x\sqrt{x}\left(2+\frac{1}{2}\right) = x\sqrt{x}\left(\frac{4+1}{2}\right) = \frac{5}{2} x\sqrt{x} = \frac{5}{2} x^{3/2}$$

[Som forventet siden $(x^{5/2})' = \frac{5}{2} x^{5/2-1} = \frac{5}{2} x^{3/2}$.]

2) $f(x) = (1+2x+x^3)\left(4 - \frac{1}{x}\right)$

Vi regner ut $f'(x)$ ved å bruke produktregelen

$$f'(x) = (1+2x+x^3)'\left(4-\frac{1}{x}\right) + (1+2x+x^3)\left(4-\frac{1}{x}\right)'$$

$$= \underline{(2+3x^2)\left(4-\frac{1}{x}\right) + (1+2x+x^3)\frac{1}{x^2}}$$

3) $f(x) = \frac{x}{x^2+1} = (x) \cdot \left(\frac{1}{x^2+1}\right)$

Regner først ut:

$$\left(\frac{1}{x^2+1}\right)'$$

Bruker kjerneregelen $g(u) = \frac{1}{u}$. $u(x) = x^2+1$.

$\frac{1}{x^2+1} = g(u(x))$ så $\left(\frac{1}{x^2+1}\right)' = g'(u(x)) \cdot u'(x)$

$$= -\frac{1}{u^2} \cdot 2x = \underline{\frac{-2x}{(1+x^2)^2}}$$

Generelt er $\underline{\left(\frac{1}{u(x)}\right)'} = \frac{-1}{u(x)^2} \cdot u'(x) = \underline{\frac{-u'(x)}{u^2(x)}}$

Tilbake til $\left(\frac{x}{1+x^2}\right)' = (x)' \cdot \frac{1}{1+x^2} + x \cdot \left(\frac{1}{1+x^2}\right)'$

$$= \frac{1}{1+x^2} + x\left(\frac{-2x}{(1+x^2)^2}\right) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{-2x^2}{(1+x^2)^2}$$

(felles nevner:) $= \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} = \underline{\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}}$

Deriverte av en kvotient.

Anta $f'(x)$ og $g'(x)$ eksisterer og $g(x) \neq 0$.

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \left(f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}\right)' \overset{\text{(prod. regel)}}{=} f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} + f(x) \cdot \left(\frac{1}{g(x)}\right)'$$

$$= f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} + f(x)\left(\frac{-g'(x)}{(g(x))^2}\right)$$

(felles nevner)

$$= \frac{f'(x) \cdot g(x)}{g(x) \cdot g(x)} + \frac{f(x)(-g'(x))}{(g(x))^2} = \underline{\frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{(g(x))^2}}$$