høgskolen i oslo
www.hio.no

# Avdeling for ingeniørutdanning

## Eksamen i Matematikk Forkurs

**Dato:** 1 Juni 2010

**Tid:** 5 tim $9^{00}-14^{00}$

**Antall sider inklusive forside:** 3

**Antall oppgaver:** 5

**Tillatte hjelpemidler:** GODKJENT KALKULATOR

**Merknad: Kandidaten må selv kontrollere at oppgavesettet er fullstendig. Ved eventuelle uklarheter i oppgaveteksten skal du redegjøre for de forutsetninger du legger til grunn for løsningen.**

**Faglig veileder:** DANIEL LARSSON

| Utarbeidet av (faglærer): | Kontrollert av (en av disse): | | | Studieleders/ Fagkoordinators underskrift: |
|---|---|---|---|---|
| | Annen lærer | Sensor | Studieleder/ Fagkoordinator | |
| Daniel Larsson | Halvard Fæsk | | | Kjetil Grønning |

**Emnekode:** FA 929 A

# Eksamen FO929A Matematikk

| | |
|---|---|
| Dato: | 1. juni 2010 |
| Vedlegg: | Formelsamling |
| Tillatte hjelpmidler: | Godkjent kalkulator |
| Godkjent: | Minst 19 av totalt 48 poeng |

**Oppgave 1.**

La $P(z) = z^3 - 3z^2 - 9z - 5$. Vis mellomregningen i løsningene av oppgavene nedenfor!

(a) Beregn verdien $P(\sqrt{5})$. Svaret skal gis eksakt. (2p)

(b) Løs likningen $P(z) = 0$. (3p)

(c) Løs ulikheten $P(z) \leq 0$. (2p)

**Oppgave 2.**

La $u = (0, 1, 2)$ og $v = (1, -3, -2)$ være to vektorer.

(a) Beregn skalarproduktet $u \cdot v$ og vektorproduktene $u \times v$ og $v \times u$. (2p)

(b) Bruk (a) til å avgjøre om $u$ og $v$ er ortogonale vektorer, parallelle vektorer eller ingen av delene. Svaret skal begrunnes. (2p)

(c) Vis at vektoren $w = (1, 3, 3)$ *ikke* ligger i planet som er utspent av vektorene $u$ og $v$. (2p)

**Oppgave 3.**

(a) La $\triangle ABC$ være en trekant hvor $\angle A = 60°$, $|AB| = 2$ og $|AC| = 3$. Beregn arealet til trekanten. Svaret skal gis eksakt. (2p)

(b) Løs likningen $5 \sin \alpha + 3 = 0$, hvor $\alpha \in [0, 2\pi)$. (2p)

(c) Fra en massiv kube med sider av lengde 5cm fjernes en massiv kule. Beregn volumet av legemet som gjenstår når kulen som fjernes fra kuben er størst mulig. Svaret skal gis eksakt. (3p)

(d) I trekanten $\triangle ABC$ er $\angle A = 17°$. Punktet $P$ ligger på linjestykke $AB$ slik at $|AP| = 2$. Vinkelen $\angle CPB$ er $42°$. Hva er lengden $|AC|$? (3p)

**Oppgave 4.**

(a) Deriver følgende funksjoner: (3p)

(i) $f(x) = 2 + \sqrt{x} + 1/x$;

(ii) $g(x) = (x^2 + 1)\cos(\pi x)$;

(iii) $h(x) = \ln(e^{2x}\sin(x))$.

(b) La $f(x) = \ln(x^3 - x)$. (3p)

(i) Bestem den største mulige definisjonsmengden til $f(x)$.

(ii) Bestem de stasjonære punktene til $f(x)$.

(iii) Bestem den største og den minste verdien til funksjonen $f(x)$ (hvis de eksisterer).

(c) Beregn følgende ubestemte integraler: (5p)

$$\int \sqrt{x}\,\mathrm{d}x, \quad \int \frac{3}{7-x}\,\mathrm{d}x, \quad \int \frac{3x}{x^2-2}\,\mathrm{d}x, \quad \int (x+1)\sin(2x)\mathrm{d}x.$$

(d) Beregn følgende bestemte integraler (svarene skal gis eksakt): (6p)

$$\int_{-1}^{1} \left(x^2 - x(x+1)\right)\mathrm{d}x, \quad \int_{-\pi}^{\pi} x^{17}\cos(x)\mathrm{d}x,$$

$$\int_{0}^{3} xe^{1-x}\,\mathrm{d}x, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin^6(x/2)\cos(x/2)\,\mathrm{d}x.$$

**Oppgave 5.**

Anta at vi har gass i en (liten) beholder som er plassert i et (uendelig) stort rom. Beholderen åpnes ved tiden $t = 0$ og gassen sprer seg ut i rommet. Anta gassbeholderen er plassert i origo. Gassen sprer seg like mye i alle retninger. Det er derfor tilstrekkelig å se på tettheten av gassen langs $x$-aksen. En modell gir at tettheten av gassen i punkt $(x, 0, 0)$ ved tiden $t$ er gitt ved

$$\rho(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}, \quad t > 0.$$

(a) Hva skjer med $\rho(x,t)$ for en fast $t$-verdi når $x \to \infty$? (2p)

(b) Hva skjer med funksjonen $\rho(x,t)$ for en fast $x$-verdi når $t \to \infty$? (2p)

(c) Er resultatene i (a) og (b) fysikalsk rimelige? (2p)

(d) For hvilken $t$-verdi er $\rho(2,t)$ størst? (2p)

# FORMELSAMLING FOR MATEMATIKK FORKURS

## 1. Algebra

### 1.1. Kvadratsetningene.

a) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
b) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
c) $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

### 1.2. Løsning av andregradslikningen.

a) Løsning av likningen $ax^2 + bx + c = 0$:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

### 1.3. Potenser med fast grunntall.

a) $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$
b) $a^p / a^q = a^{p-q}$
c) $(a^p)^q = a^{p \cdot q}$

### 1.4. Potenser med fast eksponent.

a) $a^p \cdot b^p = (a \cdot b)^p$
b) $a^p / b^p = (a/b)^p$

### 1.5. Potenser som røtter.

a) $a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}$

## 2. Rekker

### 2.1. Aritmetiske rekker.

a) $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$
b) $S_n = n \cdot (a_1 + a_n)/2$

### 2.2. Geometriske rekker.

a) $a_n = a_1 \cdot k^{n-1}$
b) $S_n = a_1 \cdot \frac{k^n - 1}{k-1}$
c) $S = \frac{a_1}{1-k}$ for $|k| < 1$

## 3. Trigonometri

### 3.1. Identiteter.

a) $\sin^2 u + \cos^2 u = 1$
b) $\tan u = \frac{\sin u}{\cos u}$
c) $\sin(-u) = -\sin u$
d) $\cos(-u) = \cos u$
e) $\sin(180° - u) = \sin u$
f) $\cos(180° - u) = -\cos u$

### 3.2. Addisjonsformler.

a) $\sin(u \pm v) = \sin u \cdot \cos v \pm \cos u \cdot \sin v$
b) $\cos(u \pm v) = \cos u \cdot \cos v \mp \sin u \cdot \sin v$
c) $\tan(u \pm v) = \frac{\tan u \pm \tan v}{1 \mp \tan u \cdot \tan v}$
d) $\sin(2u) = 2 \sin u \cdot \cos u$
e) $\cos(2u) = \cos^2 u - \sin^2 u$
f) $\tan(2u) = \frac{2 \tan u}{1 - \tan^2 u}$

### 3.3. Eksakte verdier for noen vinkler.

a)

| $u$ | $u$(rad) | $\sin u$ | $\cos u$ | $\tan u$ |
|---|---|---|---|---|
| 0° | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 30° | $\pi/6$ | $1/2$ | $\sqrt{3}/2$ | $1/\sqrt{3}$ |
| 45° | $\pi/4$ | $1/\sqrt{2}$ | $1/\sqrt{2}$ | 1 |
| 60° | $\pi/3$ | $\sqrt{3}/2$ | $1/2$ | $\sqrt{3}$ |
| 90° | $\pi/2$ | 1 | 0 | – |

### 3.4. Harmoniske svingninger.

a) $f(t) = A \sin(\omega(t - \phi)) + c$
b) $T = 2\pi/\omega$

## 4. Geometri

### 4.1. Rette linjer.

a) Likning: $y = ax + b$
b) $y - y_0 = a \cdot (x - x_0)$

### 4.2. Trekanter.

a) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$
b) $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$
c) Areal trekant: $\frac{1}{2}\, bc \cdot \sin A$

### 4.3. Sirkler.

a) Likning: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$
b) Areal sirkel: $A = \pi r^2$
c) Omkrets sirkel: $O = 2\pi r$
d) Areal sirkelsektor: $A = 1/2\, r^2 v$
e) Buelengde sirkelsektor: $b = r\, v$

### 4.4. Volum og overflate.

a) Volum prisme/sylinder: $V = G\, h$
b) Volum pyramide/kjegle: $V = 1/3\, G\, h$
c) Volum kule: $V = 4/3\, \pi r^3$
d) Overflate kule: $O = 4\pi r^2$

## 5. Vektorer

### 5.1. Skalarprodukt.

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\alpha)$

### 5.2. Vektorer i planet.

a) $(x_1, y_1) \pm (x_2, y_2) = (x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2)$
b) $c \cdot (x, y) = (cx, cy)$
c) $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = x_1 x_2 + y_1 y_2$
d) $|(x, y)| = \sqrt{x^2 + y^2}$

**5.3. Vektorer i rommet.**

a) $(x_1, y_1, z_1) \pm (x_2, y_2, z_2)$
$= (x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2, z_1 \pm z_2)$

b) $c \cdot (x, y, z) = (cx, cy, cz)$

c) $(x_1, y_1, z_1) \cdot (x_2, y_2, z_2)$
$= x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$

d) $|(x, y, z)| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

e) $(x_1, y_1, z_1) \times (x_2, y_2, z_2)$
$= (y_1z_2 - y_2z_1, x_2z_1 - x_1z_2, x_1y_2 - x_2y_1)$

## 6. Logaritmer

**6.1. Naturlige logaritmer:**

a) $\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$

b) $\ln(a/b) = \ln a - \ln b$

c) $\ln(a^p) = p \cdot \ln a$

**6.2. Logaritmer med andre grunntall.**

a) $\log_a(x) = \ln(x)/\ln(a)$

## 7. Derivasjon

**7.1. Derivasjonsregler:**

a) $(u \pm v)' = u' \pm v'$

b) $(c \cdot u)' = c \cdot u'$ for $c$ konstant

c) Produkt: $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

d) Kvosient: $(u/v)' = (u' \cdot v - u \cdot v')/v^2$

e) Kjerneregelen: $(f(u))' = f'(u) \cdot u'$

**7.2. Den deriverte til noen funksjoner:**

a) $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$

b) $(\sin x)' = \cos x$

c) $(\cos x)' = -\sin x$

d) $(\tan x)' = 1 + \tan^2 x$

e) $(e^x)' = e^x$

f) $(\ln x)' = 1/x$

## 8. Integrasjon

**8.1. Integrasjonsregler:**

a) $\int (u \pm v)\,\mathrm{d}x = \int u\,\mathrm{d}x \pm \int v\,\mathrm{d}x$

b) $\int c \cdot u\,\mathrm{d}x = c \cdot \int u\,\mathrm{d}x$ for $c$ konstant

c) Delvis integrasjon:

$$\int u' \cdot v\,\mathrm{d}x = u \cdot v - \int u \cdot v'\,\mathrm{d}x$$

d) Substitusjon:

$$\int f(u) \cdot u'\,\mathrm{d}x = \int f(u)\,du$$

**8.2. Integralet av noen funksjoner:**

a) $\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}\,x^{n+1} + C$ for $n \neq -1$

b) $\int 1/x\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C$

c) $\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C$

d) $\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C$

e) $\int (\tan^2 x + 1)\,\mathrm{d}x = \tan x + C$

f) $\int e^x\,\mathrm{d}x = e^x + C$