Prøve i	FO929A - Matematikk
Dato:	5. desember 2011
Målform:	Bokmål
Antall oppgaver:	5 (20 deloppgaver)
Antall sider:	2
Vedlegg:	Formelsamling
Hjelpemiddel:	Kalkulator

Alle svar skal grunngis. Alle deloppgaver teller like mye.

Oppgave 1

a) Løs likningen og gi svarene eksakt

$$-3(x - 3/4) = x/2 - 1.$$

Vi ganger ut og samler ledd med x på venstre side av likhetstegnet:

$$-3x - x/2 = -1 - 9/4 = -13/4.$$

Derfor er $x = (-13/4)/(-7/2) = \underline{13/14}$.

b) Løs likningen og gi svarene eksakt

$$2x^3 + 2x^2 = x.$$

Dette er ekvivalent til $x(2x^2 + 2x - 1) = 0$. Løsningene er derfor løsningen til $x = 0$ og $2x^2 + 2x - 1 = 0$. Løsningen er

$$\underline{x = 0, x = \frac{-1-\sqrt{3}}{2}, x = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}}.$$

c) Finn alle løsninger v til likningen

$$2\sin v = -\sqrt{3}$$

slik at $-180° < v < 270°$.

Løsningene er $\underline{x = -60°, -120°, 240°}$.

d) Finn alle x slik at

$$\sqrt{3-x} = -(x+3).$$

Hvis x er en løsning til likningen så er også x en løsning til likningen

$$3 - x = (\sqrt{3-x})^2 = (-(x+3))^2 = x^2 + 6x + 9.$$

Dette er annengradslikning $x^2 + 7x + 6 = (x+6)(x+1) = 0$. Vi må sjekke om løsningene $x = -1$ og $x = -6$ er løsninger til den opprinnelige likningen eller om det har "sneket seg inn" noen falske løsninger. Vi ser at $x = -1$ er falsk fordi venstresiden er $\sqrt{3-(-1)} = 2$ mens høyresiden er $-(-1+3) = -2$. Løsningen $x = -6$ er derimot ekte så løsningene er $\underline{x = -6}$.

e) Finn alle løsninger v til likningen

$$\cos^2 v = \sin v$$

slik at $0 \le v \le 2\pi$.

Vi benytter Pytagoras sin sats som sier at $\cos^2 v + \sin^2 v = 1$ for alle v. Dette gir en annengradslikning i $\sin v$

$$\sin^2 v + \sin v - 1 = 0.$$

Løsningene er $\sin v = (-1 \pm \sqrt{5})/2$. Siden $|\sin v| \le 1$ for alle v så er det ingen løsning til $\sin v = (-1 - \sqrt{5})/2$. Løsningene til den opprinnelige likningen blir derfor løsningne til $\sin v = (-1 + \sqrt{5})/2 \approx 0.618...$. Løsningene er $\underline{v = 0.666... \text{ radianer og } v = \pi - 0.666... = 2.475... \text{ radianer}}$ (i grader: $38.17°$ og $141.83°$).

f) Finn alle x slik at følgende ulikhet er gyldig

$$\frac{x-1}{2x+1} \le 1.$$

Ulikheten er ekvivalent til ulikheten

$$\frac{x-1}{2x+1} - \frac{2x+1}{2x+1} \le 0.$$

Vi har her flyttet 1 over til venstre side og funnet en felles nevner. Vi legger sammen brøkuttrykkene og får

$$\frac{-x-2}{2x+1} \le 0.$$

Ved å undersøke fortegnene til hver faktor (fortegnskjema) får vi at løsningen er alle x slik at $\underline{x \le -2 \text{ eller } x > -1/2}$. Merk at uttrykket ikke gir mening for $x = -1/2$.

Oppgave 2

Vi har fire punkt i rommet: $A(3,4,0)$, $B(-1,1,0)$, C og D slik at $ABCD$ er et parallellogram.

$$\overrightarrow{CA} = [2,3,-2].$$

a) Finn vektorene $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{BC}$ og absoluttverdien til disse vektorene.

Vektorene i koordinatform er gitt ved $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \underline{[-4,-3,0]}$, og $\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CA} = \underline{[2,0,2]}$. Lengden på vektorene er

$$\underline{|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2 + 0} = 5 \quad \text{og} \quad |\overrightarrow{BC}| = 2\sqrt{2}.}$$

b) Finn punktet D i parallellogrammet.

Vi har at $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ (konvensjon for navngiving av hjørnene i et parallellogram). Derfor er

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} = [5,4,2].$$

Punktet D har derfor koordinater $\underline{(5,4,2)}$

c) Finn vinkelen $\angle A$ og arealet til parallellogrammet $ABCD$.

Vi har at

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AD}|\,|\overrightarrow{AB}| \cos(\angle A).$$

Derfor er

$$\cos(\angle A) = [-4,-3,0] \cdot [2,0,2]/10\sqrt{2} = -2\sqrt{2}/5 \approx -0.56$$

(vi har her benyttet at $2/\sqrt{2} = \sqrt{2}$).

Dette gir at vinkelen $\underline{\angle A = \arccos(-2\sqrt{2}/5) \approx 124.4^\circ}$.

Arealet til parallellogrammet er $|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{BC}| \sin(\angle A)$. Alternativt finner vi det ved å ta absoluttverdien til kryssproduktet $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}$. Vi har også nytte av å finne dette kryssproduktet i deloppgave e).

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2[-3,4,3].$$

Arealet til parallellogrammet $ABCD$ er derfor $2\sqrt{9+16+9} = \underline{2\sqrt{34}}$.

d) Gi en parameterfremstilling av planet som parallellogrammet ligger i.

Vektorene $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{BC}$ utspenner planet og det går gjennom punktet A. En parametrisering er derfor gitt ved $\underline{x = 3 + 4s + t,\ y = 4 + 3s}$ og $\underline{z = t}$.

e) Finn likningen for planet som parallellogrammet ligger i. Gi likningen på formen $x + ay + bz + d = 0$.

En normalvektor til planet er gitt ved $\overrightarrow{N} = [-3, 4, 3]$ (se deloppgave c)). Vi har derfor at punkt på planet $P = (x, y, z)$ er løsninger til likningen

$$\overrightarrow{N} \cdot (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}) = [-3, 4, 3] \cdot ([x, y, z] - [3, 4, 0]) = 0.$$

Dette er ekvivalent til $-3x + 4y + 3z - (-9 + 16) = 0$. Vi deler med -3 for å få likningen på foreskreven form:

$$\underline{x - (4/3)y - z + 7/3 = 0.}$$

Oppgave 3

Et rasjonalt uttrykk er gitt ved

$$R(x) = \frac{x^3 - 5x^2 + 6x}{x^2 - 4} - 1.$$

a) Finn den naturlige definisjonsmengden til $R(x)$.

Et rasjonalt uttrykk er definrt når nevneren er ulik 0. I dette tilfellet er det når x er ulik -2 og 2.

Definisjonsmengden er derfor alle x forskjellig fra -2 og 2.

b) Finn nullpunktene til $R(x)$.

Vi finner en felles nevner for det rasjonale uttrykket

$$R(x) = \frac{x^3 - 5x^2 + 6x}{x^2 - 4} - \frac{x^2 - 4}{x^2 - 4} = \frac{x^3 - 6x^2 + 6x + 4}{x^2 - 4}.$$

Telleren er lik null for $x = 2$ ved inspeksjon. Telleren er derfor delelig med $x - 2$. Vi utførere polynomdivisjon og får at

$$x^3 - 6x^2 + 6x + 4 = (x - 2)(x^2 - 4x - 2).$$

Løsningen til $x^2 - 4x - 2 = 0$ er $2 + \sqrt{6}$ og $2 - \sqrt{6}$. Siden funksjonen ikke er definert for $x = 2$ er nullpunktene $\underline{2 + \sqrt{6} \text{ og } 2 - \sqrt{6}}$. Som desimaltall er de omtrentlig -0.45 og 4.45.

c) Finn asymptotene til $R(x)$. For x i definisjonsmengden er $R(x) = (x^2 - 4x - 2)/(x + 2)$. $R(X)$ har en vertikal asymptote for $x = -2$ siden

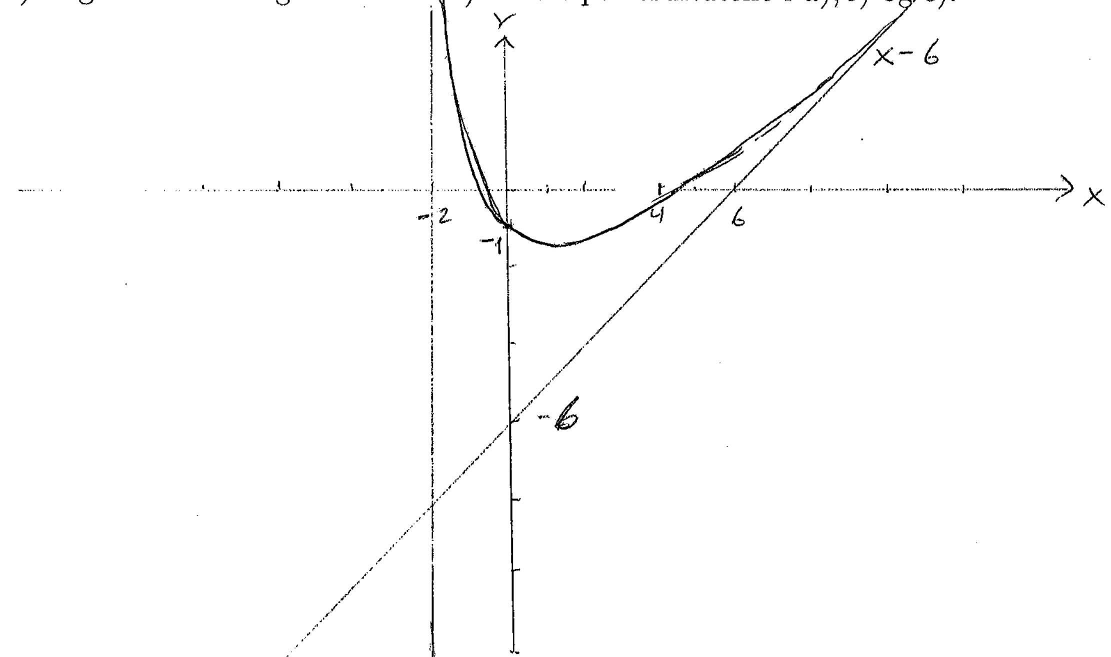
$$\lim_{x \to -2^-} (x^2 - 4x - 2)/(x + 2) = -\infty \quad \text{og} \quad \lim_{x \to -2^+} (x^2 - 4x - 2)/(x + 2) = \infty.$$

Ved å utføre polynomdivisjon ser vi at

$$R(x) = x - 6 + \frac{10}{x + 2}$$

i definisjonsmengden. Derfor er $\underline{y = x - 6}$ en skrå asymptote.

d) Lag en skisse av grafen til $R(x)$ basert på resultatene i $a), b)$ og $c)$.



Oppgave 4

a) Finn summen av alle positive hele tall mindre enn eller lik 1000 som er delelige med 7.

Det er 142 slike tall ($1000/7 = 142.85...$). Det største tallet er $7 \cdot 142 = 994$. Summen av alle positive hele tall mindre enn eller lik 1000 som er delelige med 7 er derfor

$$142(7+994)/2 = \underline{71071}.$$

b) Per har en bankkonto med fast (årlig) rente på 8%. Per setter inn 1000 kr 1. januar 1988 (på en tom konto). Han fortsetter å sette inn 1000 kr hver 1. januar frem til og med 1. januar 2004.

Hvor mye har Per på kontoen ved *utgangen* av 2005?

Pengen som ble satt inn i begynnelsen av januar 2004 har forrentet seg 2 år ved utgangen av 2005. Det blir satt inn penger i $2004-1988+1 = 17$ år.

Pengemengden er derfor

$$1000kr\left((1.08)^2 + (1.08)^3 + (1.08)^4 + \cdots + (1.08)^{18}\right) =$$

$$1000kr \cdot (1.08)^2\left((1 + (1.08) + (1.08)^2 + \cdots + (1.08)^{16}\right)$$

Dette er lik

$$1000kr \cdot (1.08)^2 \frac{(1.08)^{17}-1}{0.08} = \underline{39366\,kr}$$

(avrundet til nermeste krone).

Oppgave 5

En trekant ABC har $AB = 10$ cm, $BC = 7$ cm og vinkel $\angle A = \pi/6$ radian.

a) Hva er mulig lengde til siden AC? La b betegne lengden til siden AC. Hvis vi bruker cosinussetningen får vi at

$$7^2 = 10^2 + b^2 - 2 \cdot 10b\cos(\pi/3).$$

Dette gir at $\underline{b = 5\sqrt{3} + 2\sqrt{6} \approx 13.559\ldots \text{ eller } b = 5\sqrt{3} - 2\sqrt{6} \approx 3.76\ldots}$.

b) Hva er vinkel $\angle B$?

Vi kan bruke sinussetningen $\sin(\angle B) = b\sin(\pi/6)/7$. Hver verdi for b gir to mulige løsninger til $\angle B$. Når $b = 5\sqrt{3} - 2\sqrt{6}$ er det klart at $\angle B < 90°$ så vinkelen er $\underline{\angle B = 15.6°}$ og når $b = 5\sqrt{3}+2\sqrt{6}$ må vinkelen $\angle B$ er det klart at $\angle B > 90°$ så vinkelen er $\underline{\angle B = 104.4°}$.

c) Et punkt P ligger på linjen som går gjennom A og C, slik at lengden til AP er $\sqrt{2}$ ganger lengre enn lengden til BP. Finn lengden til AP. La z være lengden til AP. Kosinussetningen gir da at $(x/\sqrt{2})^2 = 10^2 + x^2 - 2 \cdot 10x\cos(30°)$. Dette kan nå løses for x.

Her er en alternativ måte å løse oppgaven på som bruker sinussetningen. Vi har at

$$(x/\sqrt{2})/\sin(30°) = x/\sin(\angle B).$$

Dette gir at $\sin(\angle B) = 1/\sqrt{2}$. Derfor er $\angle B = 45°$ (det er klart at $135°$ ikke kan være løsningen). Derfor får vi at vinkelen i hjørne P er $\angle P = 180 - 30° - 45° = 105°$. Sinussetningen gir nå at lengden AP er $x = 5\sqrt{2}/\sin(105°) = 5\sqrt{2}/\cos(15°) = 20/\sqrt{1+\sqrt{3}}$, hvor vi har brukt den eksakte verdien av $\cos 15°$ (det er ikke nødvendig å gi svaret eksakt). Lengden AP er $\underline{7.32\ldots}$.