H. Fauske

① Forkurs matematikk

prøve 4.12.2017

Løsningsforslag

1 a)

$$\frac{2x}{3} - 2 = \frac{4}{7}$$

$$\frac{2x}{3} = \frac{4}{7} + 2$$ deler begge sider med 2

$$\frac{x}{3} = \frac{2}{7} + 1 = \frac{2}{7} + \frac{7}{7} = \frac{9}{7}$$ ganger begge sider med 3

$$x = 3 \cdot \frac{9}{7} = \underline{\underline{\frac{27}{7}}}$$

b) Vi finner først nullpunktene til

$4x^2 + 7x + 3$:

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 4 \cdot 3}}{2 \cdot 4} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 48}}{8} = \frac{-7 \pm 1}{8}$$

$$x = \underline{-1} \quad \text{og} \quad x = \frac{-6}{8} = \underline{\frac{-3}{4}}$$

polynomet faktoriserer som

$$4 \cdot (x - (-1))\,(x - (-\tfrac{3}{4}))$$

koeff. til x^2 ene roten andre roten.

$$4x^2 + 7x + 3 = \underline{4(x+1)(x + \tfrac{3}{4}) = (x+1)(4x+3)}$$

c) I : $2x + y = 1$

(2) II : $-x + y = -1$

I - II gir $2x - (-x) + y - y = 1 - (-1)$

$3x = 2$

Så $x = \frac{2}{3}$

$y = -1 + x = -1 + \frac{2}{3} = \frac{-1}{3}$

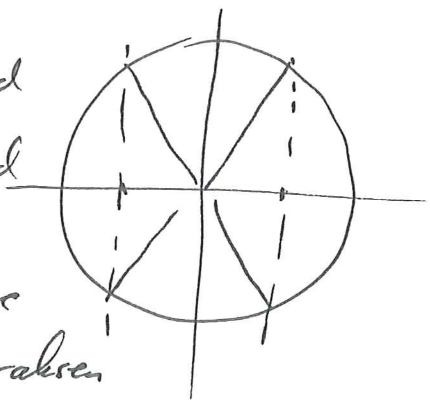
Løsningene er $\underline{x = \frac{2}{3} \text{ og } y = \frac{-1}{3}}$

d) $4\cos^2 v = 1 \Leftrightarrow \cos^2 v = \frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow \cos v = \frac{1}{2}$ eller $\cos v = \frac{-1}{2}$

$\arccos \frac{1}{2} = 60° = \frac{\pi}{3}$ rad

$\arccos \frac{-1}{2} = 120° = \frac{2\pi}{3}$ rad



De to andre løsningene i $[0, 2\pi\rangle$ under x-aksen er

$2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$ og

$2\pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$.

Løsningene i $[0, 2\pi\rangle$ er: $\underline{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}}$

(3)

e) $3^x = 4/3$

Vi anvender ln på begge sider:

$$x \ln 3 = \ln 3^x = \ln(4/3) = \ln 4 - \ln 3$$

$$\underline{x = \frac{\ln 4}{\ln 3} - 1}$$

f)

$$2\sqrt{x} + 3 = x$$

kvadrer vi begge sider blir vi ikkje kvitt $\sqrt{x}$. Vi tar først 3 over på høyre side og så kvadrere:

$$2\sqrt{x} = x - 3$$

$$\Rightarrow \quad (2\sqrt{x})^2 = (x-3)^2$$

$$4x = x^2 - 6x + 9$$

$$x^2 - 10x + 9 = 0$$

$$(x-9)(x-1) = 0$$

Så $x = 1$ og $x = 9$.

Løsningene til $2\sqrt{x} + 3 = x$ ligger blant $\{1, 9\}$. Vi sjekker om noen av dem er løsninger:

④ $x = 1$: $2\sqrt{1} + 3 = 4 \neq 1$

Falsk løsning.

$x = 9$: $2\sqrt{9} + 3 = 9$ Løsning.

Løsningen til likningen $2\sqrt{x} + 3 = x$

er $\underline{x = 9}$

2.

a) $$\frac{2e^x}{e^x + 1} \leq 1$$ tar 1 over til venstre side

$$\frac{2e^x}{e^x + 1} - \frac{e^x + 1}{e^x + 1} \leq 0$$

$$\frac{e^x - 1}{e^x + 1} \leq 0.$$

$e^x > 0$ for alle x så dette er ekvivalent til $e^x - 1 \leq 0$

e^x er en økende funksjon og $e^0 = 1$,

så $e^x \leq 1$ for $x \leq 0$.

Løsningsmengden er $\underline{\langle -\infty, 0]}$

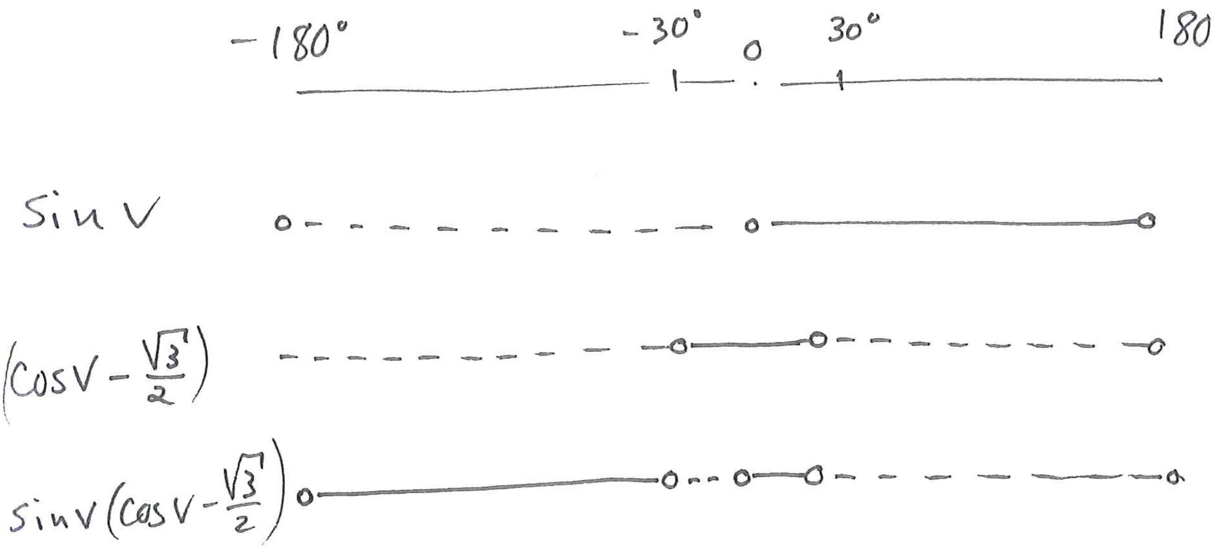
b)

$$2\sin v \cos v < \sqrt{3}\sin v$$

5

vi tar $\sqrt{3}\sin v$ over til venstre side

$$2\sin v\left(\cos v - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) < 0$$



Løsningsmengden er $\langle -30^\circ, 0^\circ \rangle \cup \langle 30^\circ, 180^\circ \rangle$

3. a)

$$f'(x) = \left(x^{2.5} - 2\sqrt{3}\sqrt{x} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x}\right)'$$

$$= 2.5x^{1.5} - 2\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{4}\cdot\frac{-1}{x^2}$$

$$= 2{,}5x^{1.5} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{x}} - \frac{1}{4x^2}$$

Produktregelen

b) $g'(x) = (5x)' \sin(3x+1) + 5x \cdot (\sin(3x+1))'$

6

$- (\cos(1))'$

↑ konstant

$$= \underline{5\sin(3x+1) + 15x\cos(3x+1)}$$

c) $h'(x) = 2x - 2$

stigningstallet til grafen i $x = 2$ er:

$h'(2) = 2$

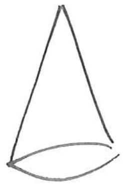
Tangentlinjen i $(2, f(2))$ er gitt ved

$$Y = h'(2)(x-2) + 1$$

$$= 2(x-2) + 1 = 2x - 3$$

$$\underline{Y = 2x - 3}$$

4. a)



$$V = \frac{\pi}{3} h \cdot r^2$$

$$V = 1 \text{ Liter} = 1 dm^3 = (10 cm)^3$$

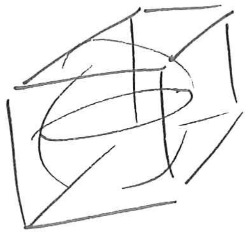
$$= 1000 cm^3$$

$h = 10$ cm :

$$r^2 = \frac{3V}{\pi \cdot h} = \frac{3}{\pi} \frac{1000 cm^3}{10 cm}$$

$$r = \sqrt{\frac{3}{\pi} 100 cm^2} = \underline{9.77 cm}$$

b)



radius til kulen r
sidelengde til kuben er $2r$

Volum kule : $\frac{4\pi r^3}{3}$

Volum kube : $(2r)^3$

Forholdet $$\frac{V_{kube}}{V_{kule}} = \frac{8 r^3}{4\pi r^3/3} = \underline{\underline{\frac{6}{\pi}}} \sim 1.91$$

Kuben har nesten dobbelt så stort volum som kulen.

(8)

$x+1$ deler $P(x) \iff P(-1) = 0$

5. $P(-1) = a(-1)^3 + 3(-1) + 2 = -a - 3 + 2 = 0$

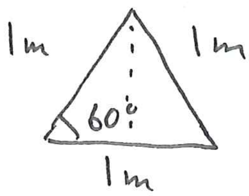
Så $a = -1$.

I dette tilfellet er $\frac{P}{x+1}$ lik

$$
\begin{array}{l}
-x^3 + 3x + 2 : x+1 = \underline{\underline{-x^2 + x + 2}} \\
\underline{-x^3 - x^2} \\
\quad x^2 + 3x + 2 \\
\quad \underline{x^2 + x} \\
\qquad 2x + 2 \\
\qquad \underline{2x + 2} \\
\qquad\quad 0
\end{array}
$$

$$\frac{-x^3 + 3x + 2}{x+1} = \underline{-x^2 + x + 2}$$

6. a)

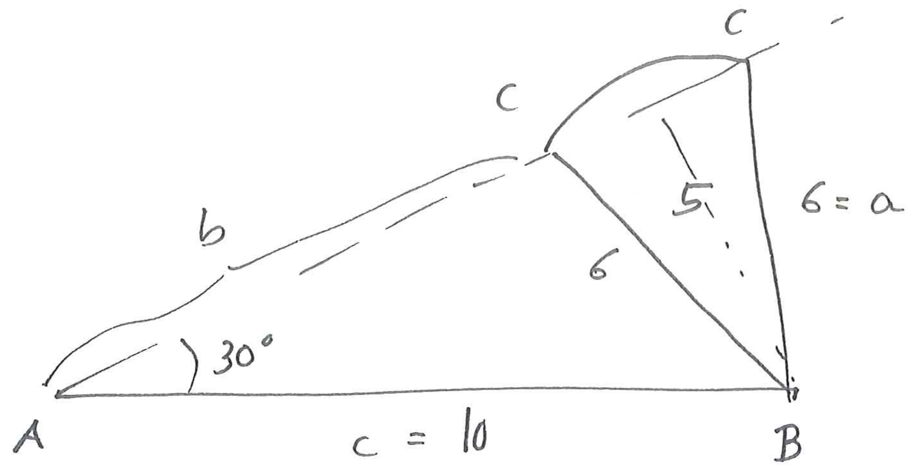


Arealet er lik $\dfrac{\overbrace{1\text{m} \cdot \sin(60°)}^{\text{høyde}} \cdot \overbrace{1\text{m}}^{\text{bredde}}}{2}$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\,\text{m}^2 = \underline{\underline{\frac{\sqrt{3}}{4}\,\text{m}^2}}$$

b)

9



Sinussetningen gir

$$\frac{\sin(30°)}{6} = \frac{\sin C}{10} = \frac{1}{12}$$

så $\quad \sin C = \frac{10}{6} \cdot \sin(30°) = \frac{5}{6}$

$$C = 56.44° \quad \text{og} \quad 180° - 56.44°$$
$$= 123,56°$$

$$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin A}{a} = \frac{1}{12}$$

$$b = 12 \sin B$$

To tilfeller : $\quad C = 56.44° \qquad B = 180° - 30 - c$
$= 93.56$

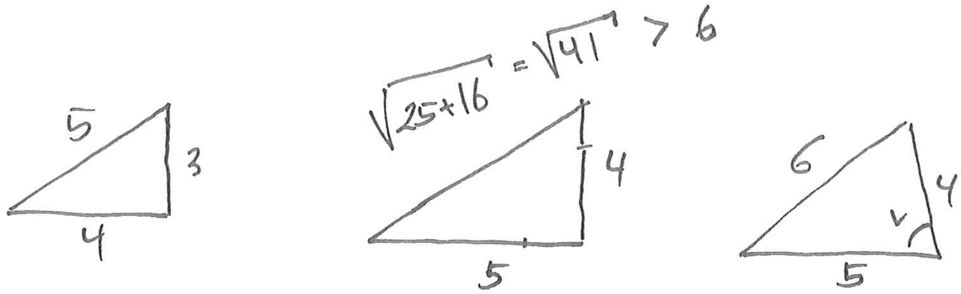
$$b = 12 \cdot \sin(93.56°) \sim \underline{11.98}$$

$C = 123,56° \qquad B = 180° - 30 - c = 26.44°$

$$b = 12 \cdot \sin(26.44°) = \underline{5.34}$$

10

7.



Trekanten er ikkje rettvinkla og vinkelen mellom dei to korte sidene må vere mindre enn 90°.

Vi regner den ut ved hjelp a cosinussetningen

$$6^2 = 5^2 + 4^2 - \underbrace{2 \cdot 4 \cdot 5}_{40} \cdot \cos(V)$$

$$40 \cos V = 25 + 16 - 36 = 5$$

$$\cos V = \frac{5}{40} = \frac{1}{8}$$

$$V = \arccos\left(\frac{1}{8}\right) \cong \underline{\underline{82.8^\circ}}$$

8 $\quad f(x) = \ln(x) - x$

11 $\quad f'(x) = \frac{1}{x} - 1 \qquad f''(x) = \frac{-1}{x^2} < 0$

$f'(x) = 0$ når $\frac{1}{x} - 1 = 0$

$x = 1.$

$f'(x) < 0$ for $x > 1$ avtagende

og $f'(x) > 0$ for $0 < x < 1$. økende

$f(\frac{1}{e}) = \ln(e^{-1}) - \frac{1}{e} = -1 - \frac{1}{e} \sim -1.37$

$f(1) = -1$

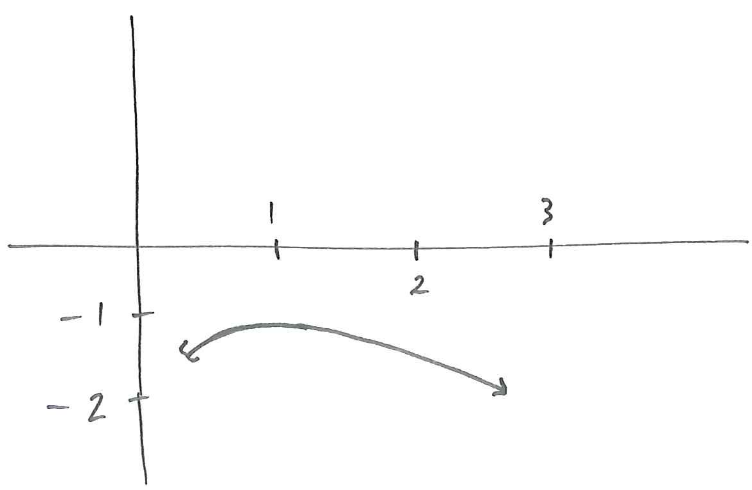
$f(e) = \ln(e) - e = +1 - e \sim -1.718$

funksjonen er kontinuerlig så $\lim_{x \to e^-} f(x) = f(e)$.

Globalt toppunkt i $(1, -1)$

Lokalt bunnpunkt i $(\frac{1}{e}, -1 - \frac{1}{e})$

Ingen globale bunnpunkt



(12) 9

$$\lim_{x\to -1^-} k(x) = \lim_{x\to -1^-} 2x+3 = +1$$

$$\lim_{x\to -1^+} k(x) = \lim_{x\to -1^+} x^2 = +1$$

Vi har her benyttet at polynomer er kontinuerlige.

$k(-1) = 1.001 \neq 1$

Så $\underline{k(x) \text{ er ikkje kontinuerlig}}$

10

$$\ln(2x+3) = \ln|x| + 1$$

$$\ln(2x+3) - \ln x = 1 = \ln e$$

$$\ln\left(\frac{2x+3}{x}\right) = \ln e$$

$$\frac{2x+3}{x} = e$$

$$2x+3 = e \cdot x$$

$$(e-2)x = 3$$

$$\underline{\underline{x = \frac{3}{e-2}}} \sim \underline{4.17}$$