EKSAMEN 2015 – LØSNINGSFORSLAG

Oppgave 1

a)

$$\left(\frac{a^2}{b}\right)^{-4}\cdot\left(\frac{a\sqrt{a}}{b^3}\right)^2=\left(\frac{b}{a^2}\right)^4\cdot\left(\frac{a^{\frac{3}{2}}}{b^3}\right)^2=\frac{b^4}{a^8}\cdot\frac{a^3}{b^6}=\frac{a^3b^4}{a^8b^6}=a^{3-8}b^{4-6}=$$

$$=a^{-5}b^{-2}=\underline{\underline{\frac{1}{a^5b^2}}}$$

b)

$4\sin x-\sqrt{6}=\sqrt{2}$ når $x\in[0^\circ, 360^\circ\rangle$

$4\sin x=\sqrt{2}+\sqrt{6} \quad |:4$

$\sin x=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

$x=\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right)=75^\circ$

Løsninger

$x=75^\circ+360^\circ\cdot n$ eller $x=(180^\circ-75^\circ)+360^\circ\cdot n$

Siden $x\in[0^\circ, 360^\circ\rangle$, blir løsningen:

$\underline{\underline{x=75^\circ \text{ eller } x=105^\circ}}$

c)

$3(\ln x)^2-\ln x^5-2=0$

$3(\ln x)^2-5\ln x-2=0$

Husk! Vi må ha $x>0$ for at logaritmen skal være definert

Vi setter $u=\ln x$, og får

$3u^2-5u-2=0$

$3(u+\frac{1}{3})(u-2)=0$ (fra abc-formel)

$u=-\frac{1}{3}$ eller $u=2$

$\ln x=-\frac{1}{3}$ eller $\ln x=2$

Løsning: $\boxed{x=e^{-\frac{1}{3}}}$ $\boxed{x=e^2}$

d) $\sqrt{x+2} - 2x = 1$ $\qquad x+2 \geq 0$

$x \geq -2$

$\sqrt{x+2} = 2x+1 \quad |^2$

$x+2 = 4x^2+4x+1$

$4x^2+3x-1=0$

Fra abc-formelen

$x = \frac{1}{4}$ eller $x=-1$

Prøve: For $x = \frac{1}{4}$

V.S. $\sqrt{\frac{1}{4}+2} - 2\cdot\frac{1}{4} = \sqrt{\frac{9}{4}} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$ } ok.

V.S 1

For $x = -1$

V.S. $\sqrt{-1+2} - 2\cdot(-1) = \sqrt{1} + 2 = 3$

H.S. 1 $\qquad$ V.S $\neq$ H.S.

Løsning: $\underline{\underline{x = \frac{1}{4}}}$

e) $f(x) = x^2 \cdot \cos 2x$

$f'(x) = (x^2)' \cdot \cos 2x + x^2 \cdot (\cos 2x)' =$

$= 2x \cos 2x + x^2 ((-\sin 2x)\cdot 2) =$

$= \underline{\underline{2x \cos 2x - 2x^2 \sin 2x}}$ $\qquad$ Kan også skrives

$\underline{\underline{2x(\cos 2x - x \sin 2x)}}$

f) $\int \frac{2x}{x^2-1}\,dx = \int \frac{\cancel{2x}}{u}\cdot\frac{du}{\cancel{2x}} = \int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + C = \underline{\underline{\ln|x^2-1| + C}}$

$x \neq \pm 1$ $\quad \boxed{\begin{array}{l} u = x^2-1 \\ \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{du}{2x} \end{array}}$

g)

$$0 < x - 1 \leq x^2 - 7$$

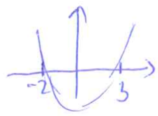
$$\Updownarrow$$

$x - 1 > 0$ og $x^2 - 7 \geq x - 1$

$x > 1$

$x^2 - x - 6 \geq 0$

$(x+2)(x-3) \geq 0$



$(x+2)(x-3) \geq 0$

for $x \leq -2$ eller $x \geq 3$

Husk! Begge ulikhetene skal være oppfylt.

Løsning: $\underline{\underline{x \geq 3}}$

h)

$f(x) = \frac{1}{2x}$, $x \in [1, 4]$

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

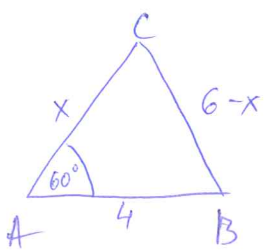
$$V = \pi \int_1^4 \left(\frac{1}{2x}\right)^2 dx$$

$$\pi \int \frac{1}{4x^2} dx = \frac{\pi}{4} \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{\pi}{4} \left[\frac{1}{x}\right] + C$$

$$\pi \int_1^4 \left(\frac{1}{2x}\right)^2 dx = -\frac{\pi}{4} \left[\frac{1}{x}\right]_1^4 = -\frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{4} - 1\right) = -\frac{\pi}{4} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{3\pi}{16} \approx 0{,}59$$

Benevning $[dm^3]$. $V \approx 0{,}59\ dm^3 \approx \underline{\underline{0{,}59\ l}}$

i)



$AC = ?$

$\angle B = ?$

For å finne lengden AC kan vi bruke cosinussetningen.

Vi setter $a = 6 - x$, $b = x$ og $c = 4$.

Da er $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\frac{\pi}{3}$

Vi finner da at

$$(6-x)^2 = x^2 + 4^2 - 8x\cos\frac{\pi}{3}$$

$$36 - 12x + x^2 = x^2 + 16 - 4x$$

$$8x = 20 \Rightarrow x = \frac{5}{2} \Rightarrow a = \frac{7}{2}$$

$$\underline{\underline{AC = \frac{5}{2}}}$$

Å finne $\angle B$:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\angle B$$

$$\cos\angle B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$$

$$\cos\angle B = \frac{\frac{49}{4} + 16 - \frac{25}{4}}{2\cdot\frac{7}{2}\cdot 4} = \frac{11}{4}.$$

$$\angle B = \cos^{-1}\left(\frac{11}{4}\right) \approx \underline{\underline{38{,}21^\circ}}$$

Oppgave 2

a)
$$\left.\begin{array}{l} A(0,0,0) \\ B(3,1,0) \\ C(2,4,0) \end{array}\right\} \Rightarrow A, B, C \in \text{xy-planet.}$$

$$\overrightarrow{CA} = [0-2, 0-4, 0-0] = [-2, -4, 0]$$

$$\overrightarrow{CB} = [3-2, 1-4, 0-0] = [1, -3, 0]$$

$$|\overrightarrow{CA}| = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2 + 0^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$|\overrightarrow{CB}| = \sqrt{1^2 + (-3)^2 + 0^2} = \sqrt{10}$$

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = [-2, -4, 0] \cdot [1, -3, 0] = 10$$

$$\cos\angle C = \frac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}| \cdot |\overrightarrow{CB}|} = \frac{10}{2\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \underline{\underline{\angle C = 45^\circ}}$$

b) Punktene A, B og C skal utgjøre tre av hjørnene i et parallellogram.

Vi skal vise at $D(-3,1,0)$ er det siste hjørnet.

Vi må vise at $\vec{AB} = \vec{DC}$ og $\vec{AD} = \vec{BC}$

$$\left.\begin{aligned}\vec{AB} &= [3,1,0] \\ \vec{DC} &= [3,1,0]\end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{AB} = \vec{DC}$$

$$\left.\begin{aligned}\vec{AD} &= [-1,3,0] \\ \vec{BC} &= [-1,3,0]\end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{AD} = \vec{BC}$$

To og to sider i ABCD er parvis parallelle $\Rightarrow$ ABCD - parallellogram.

c) Først skal vi vise at grunnflaten er kvadratisk

$$\left.\begin{aligned}\vec{AB} &= [3,1,0] \Rightarrow |\vec{AB}| = \sqrt{10} \\ \vec{BC} &= [-1,3,0] \Rightarrow |\vec{BC}| = \sqrt{10}\end{aligned}\right\} \text{AB og BC er like lange.}$$

Følgelig har vi at alle sidene er like lange fra det vi viste i (2b).

$$\vec{AB} \cdot \vec{BC} = [3,1,0] \cdot [-1,3,0] = 0.$$

Vinkelen mellom AB og BC er 90°.

Resten av vinklene i parallellogrammet også er 90° siden to og to sider er parvis parallelle.

Det vil si at ABCD er kvadrat med sidekant $\sqrt{10}$.

For å vise at pyramiden er rett, finner vi først midtpunktet M i ABCD.

$$\vec{AM} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{BC}) = \frac{1}{2}([3,1,0] + [-1,3,0]) = [1,2,0].$$

Vi ser at dette er x- og y- koordinatene til T.

Vi får at $\vec{MT} = [(1,2,5) - (1,2,0)] = [0,0,5]$

og $\vec{AM} \cdot \vec{MT} = [1,2,0] \cdot [0,0,5] = 0 \Rightarrow \vec{MT} \perp \vec{AM}$.

Det vil si at pyramiden er rett med høyde $h = 5$

og grunnflate $G = \sqrt{10} \cdot \sqrt{10} = 10$

d)

$$V = \frac{G \cdot h}{3}$$

$$V = \frac{10 \cdot 5}{3} = \underline{\underline{\frac{50}{3} \approx 16,67}}$$

e)

$\vec{AB} = [3,1,0]$

$\vec{AT} = [1,2,5]$

$$A_\Delta = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AT}|$$

$$\vec{AB} \times \vec{AT} = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = [5,-15,5]$$

$$A_\Delta = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AT}| = \frac{1}{2}\left(\sqrt{25+225+25}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{275} = \underline{\underline{\frac{5\sqrt{11}}{2}}}$$

f)

$\vec{AB}$ og $\vec{AT} \in \alpha \Rightarrow \vec{AB} \times \vec{AT}$ står normalt på begge disse vektorene.

$\vec{AB} \times \vec{AT} = [5,-15,5] = 5[1,-3,1]$

Vi kan bruke $\vec{n} = [1,-3,1]$ som normalvektor.

Likningen for et plan er

$ax + by + cz + d = 0$

Siden $A(0,0,0) \in \alpha$, er d lik 0.

Vi får $x - 3y + z = 0$

Likningen for α : $\underline{\underline{x - 3y + z = 0}}$

Oppgave 3

a) $f(x) = \frac{2x^2}{x^2-4}$

$x^2 - 4 \neq 0 \Rightarrow (x+2)(x-2) \neq 0 \Rightarrow \underline{\underline{D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}}}$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = 0$

$f(x)$ har nullpunkt for $\underline{\underline{x = 0}}$

b) $f(x)$ er ikke definert i $x = -2$ og $x = 2$. Dette er derfor kandidater til vertikale asymptoter.

$x = -2$

Telleren $2x^2 = 2 \cdot (-2)^2 = 8$.

$f(x) \to \pm\infty$ når $x \to -2$

$x = 2$

Telleren $2x^2 = 2 \cdot 2^2 = 8$

$f(x) \to \pm\infty$ når $x \to 2$

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{x = -2}}$ og $\underline{\underline{x = 2}}$ er vertikale asymptoter

Har $f(x)$ horisontale asymptoter?

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2}{x^2-4} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\overbrace{\frac{2}{x^2}}^{\to 2}}{\underbrace{\frac{x^2}{x^2}}_{\searrow 1} - \underbrace{\frac{4}{x^2}}_{\searrow 0}} = 2$$

$\underline{\underline{y = 2}}$ er en horisontal asymptote.

c) $f(x) = \frac{2x^2}{x^2-4}$

$$f'(x) = \frac{(2x^2)' \cdot (x^2-4) - 2x^2 \cdot (x^2-4)'}{(x^2-4)^2} = \frac{4x(x^2-4) - 2x^2 \cdot 2x}{(x^2-4)^2} =$$

$$= \frac{4x^3 - 16x - 4x^3}{(x^2-4)^2} = \frac{-16x}{(x^2-4)^2}$$

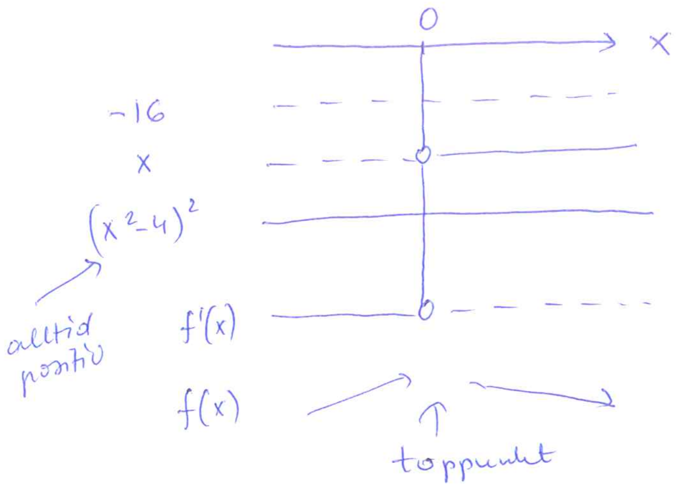
d) Å finne topp- eller bunnpunkter for $f(x)$.

Vi må løse $f'(x) = 0$

Fra (c) har vi

$$f'(x) = \frac{-16x}{(x^2-4)^2}$$

$f'(x) = 0 \iff -16x = 0 \iff x = 0.$



$f(0) = 0$

Funksjonen har toppunktet $\underline{\underline{(0,0)}}$

e) Vi skal finne eventuelle vendepunkter.

$$f''(x) = \frac{(-16x)'(x^2-4)^2 - (-16x)\left((x^2-4)^2\right)'}{(x^2-4)^4} =$$

$$= \frac{-16(x^2-4)^2 + 16x \cdot 2(x^2-4)(2x)}{(x^2-4)^4}$$

$$= \frac{-16(x^2-4) + 64x^2}{(x^2-4)^3} = \frac{-16x^2+64+64x^2}{(x^2-4)^3} = \frac{48x^2+64}{(x^2-4)^3}$$

$f''(x) = 0 \iff 48x^2 + 64 = 0$

ingen nullpunkter.

Funksjonen har ingen vendepunkter.

Oppgave 4

Tre lokale fotballklubber:

K_A – 250 medlemmer
K_B – 100 medlemmer
K_C – 50 medlemmer

det skal trekkes ut 2 spillere.

a)

Sannsynligheten for at første spiller kommer fra K_A

$$P_1(K_A) = \frac{250}{400} = \frac{5}{8}$$

Sannsynligheten for at den andre spiller kommer fra K_A

$$P_2(K_A) = \frac{249}{399} = \frac{83}{133}$$

Sannsynligheten for at begge kommer fra K_A

$$P_1(K_A) \cdot P_2(K_A) = \frac{5}{8} \cdot \frac{83}{133} = \frac{415}{1064} \approx 0{,}39 \quad (\approx 39\%)$$

b) Vi bruker notasjonen $K_A K_B$ hvis første spiller er fra K_A og andre spiller er fra K_B, og tilsvarende for andre uttrekk.

Vi har 4 muligheter for at en og bare en spiller kommer fra K_A.

Disse er:

$K_A K_B$, $K_B K_A$, $K_A K_C$ og $K_C K_A$.

Vi finner sannsynligheten for disse 4 mulighetene og deretter summeres disse.

$$P(K_A K_B) = \frac{250}{400} \cdot \frac{100}{399} = \frac{125}{798}$$

$$P(K_B K_A) = \frac{100}{400} \cdot \frac{250}{399} = \frac{125}{798}$$

$$P(K_A K_C) = \frac{250}{400} \cdot \frac{50}{399} = \frac{125}{1596}$$

$$P(K_C K_A) = \frac{50}{400} \cdot \frac{250}{399} = \frac{125}{1596}$$

$$P(K_A K_B) + P(K_B K_A) + P(K_A K_C) + P(K_C K_A) =$$

$$= \frac{125}{798} + \frac{125}{798} + \frac{125}{1596} + \frac{125}{1596} \approx 0{,}4699 \approx 47{,}0\%$$

Oppgave 5

a) $V = G \cdot h = \pi r^2 h$

$$\pi r^2 h = 800 \quad [m^3]$$

$$\underline{\underline{h = \frac{800}{\pi r^2}}} \quad [m]$$

b) $O = \pi r^2 + \pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + 2\pi r h$

Fra (a) har vi $h = \frac{800}{\pi r^2}$

$$O = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{800}{\pi r^2} = \underline{\underline{2\pi r^2 + \frac{1600}{r}}}$$

c) Vi skal minimalisere overflaten O, og finne r og h i dette tilfellet.

$$O = 2\pi r^2 + \frac{1600}{r} \implies O(r) = 2\pi r^2 + \frac{1600}{r}$$

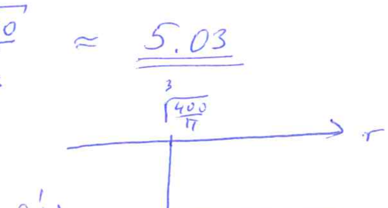
$$O'(r) = 4\pi r - \frac{1600}{r^2}$$

Vi setter $O'(r) = 0$ og løses med hensyn på r.

$$4\pi r - \frac{1600}{r^2} = 0 \quad | \cdot r^2$$

$$4\pi r^3 - 1600 = 0$$

$$r^3 = \frac{400}{\pi} \implies \underline{\underline{r = \sqrt[3]{\frac{400}{\pi}}}} \approx \underline{\underline{5.03}}$$



For å finne $h(r)$, brukes vi uttrykket fra (a)

$$h = \frac{800}{\pi r^2} = \frac{800}{\pi\left(\sqrt[3]{\frac{400}{\pi}}\right)^2} = \underline{\underline{4\sqrt[3]{\frac{50}{\pi}}}} \approx \underline{\underline{10,06}}$$

Oppgave 6

Gitt en uendelig geometrisk rekke

$$S = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$$

$$a_2 = \frac{1}{2} \quad , \quad a_5 = \frac{1}{16}.$$

a) Vi bestemmer kvotienten k først.

Siden vi nå vet a_2 og a_5 får vi at $a_5 = k a_4 = k^2 a_3 = k^3 a_2$

$a_5 = k^3 a_2$. Dette gir

$$\frac{k^3}{2} = \frac{1}{16} \Rightarrow k^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow \underline{\underline{k = \frac{1}{2}}}.$$

$$a_2 = k a_1$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} a_1 \Rightarrow \underline{\underline{a_1 = 1.}}$$

Altså er $S = \sum_{i=1}^{\infty} a_i = \sum_{n=0}^{\infty} k^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$

Siden $k = \frac{1}{2} \Rightarrow 0 < k < 1$, er rekken konvergent.

I tillegg er rekken konvergent med sum

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

b) Vi setter nå $S_n = \sum_{i=}^{n} a_i$

Vi skal bestemme n slik at $S - S_n < 0{,}0001$.

Vi bruker formel for sum av en endelig geometrisk rekke

$S_n = \frac{k^n - 1}{k-1}$ og setter inn $k = \frac{1}{2}$

$$S_n = \frac{(\frac{1}{2})^n - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 2 - \frac{2}{2^n} = 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$$

$$S - S_n = 2 - 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2^n}$$

Da får vi

$$2 \cdot \frac{1}{2^n} < 0.0001 \Rightarrow \frac{1}{2^n} < 0.00005$$

Vi tar nå logaritmen på begge sider
(logaritmen er strengt voksende, så det er ok
med ulikhetstegnet)

$$\ln \frac{1}{2^n} < \ln(0{,}00005)$$

$$\ln \left(\frac{1}{2}\right)^n < \ln(0{,}00005)$$

$$n \ln\left(\frac{1}{2}\right) < \ln(0{,}00005) \qquad \Big/ : \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

Logaritmen til tall mellom 0 og 1 er negativ,
så vi må snu ulikhetstegnet når vi deler
med $\ln\left(\frac{1}{2}\right)$

Vi får

$$n > \frac{\ln(0{,}00005)}{\ln \frac{1}{2}} \approx 14{,}29$$

Siden n skal være et helt tall må vi velge
$\underline{\underline{n \geq 15}}$ for at $S - S_n < 0{,}0001$