Innlevering	BYPE2000 Matematikk 2000 HIOA
	Obligatorisk innlevering 3
Innleveringsfrist	Torsdag 24. april 2014 før forelesningen
Antall oppgaver:	9

1

Regn ut determinanten til følgende matriser. (Det er også en fin øving å finne inversmatrisene deres.)

a)

$$\begin{bmatrix} 19 & 20 \\ 20 & 21 \end{bmatrix}$$

Determinanten er lik $19 \cdot 21 - 20^2 = (20-1)(20+1) - 20^2 = -1$ ved konjugatsetningen.

b)

$$\begin{bmatrix} a & 3b \\ 4c & 9b \end{bmatrix}$$

Determinanten er lik $a \cdot 9b - 3b \cdot 4c = 3b(3a - 4c)$.

c)

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

Determinanten er kanskje lettest å regne ut hvis vi regner den ut rekursivt ved å ta utgangspunkt i rad nummer to. Da får vi

$$(-1)^{2+2} \cdot (-1) \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5$$

d)

$$\begin{bmatrix} 0 & 39 & -13 \\ 1 & -12 & 4 \\ 7 & 21 & -7 \end{bmatrix}$$

(Hint: Du kan spare deg for litt arbeid ved å benytte Thm. 3 i 3.2. Resultatet er også gyldig hvis rader erstattes av søyler.)

Vi setter utfor en faktor 13 fra første rad og en faktor 7 fra tredje rad i determinanten. Da får vi

$$13 \cdot 7 \begin{vmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & -12 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

Vi kan og ta ut en faktor 3 fra søyle nummer 2. Da står vi igjen med en determinant til en matrise med små heltall

$$13 \cdot 7 \cdot 3 \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Vi kan trekke fra rad 1 fra rad 3, og legge til 4 ganget med rad 1 til rad 2

$$13 \cdot 7 \cdot 3 \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

e)

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{bmatrix}$$

Her blir det litt regning. Vi ordner faktorene alfabetisk slik at det er lettere å sammenligne dem. Vi får at determinanten er lik

$$a(bc - a^2) - b(b^2 - ac) + c(ab - c^2) = 3abc - (a^3 + b^3 + c^3).$$

e)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Hvis vi stokker om på radene ser vi at dette blir lik en øvre trianguler matrise (matrise på trappeform). Siden determinanten skifter fortegn for hvert ombytte av rader (eller søyler) må vi holde styr på hvor mange slike operasjoner vi utfører. Vi bytter først om rad 1 og rad 2, og rad 3 og rad 4. Til tredj og sist, bytter vi om rad 2 (som tidligere var rad 1) med rad 3 (som tidligere var rad 4). Vi får da at determinanten er lik

e)

$$-\begin{vmatrix} 3 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -(3(-3)(-1))(-2)) = 18$$

2

Finn egenverdiene og egenvektorer som utspenner egenrommet. Hvis egenrommet er hele vektorrommet skal dere også diagonalisere matrisen. Husk at egenverdier også kan være komplekse tall.

a)

$$\begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Den karakteristiske likningen er

$$(7-\lambda)(2-\lambda) - 4 \cdot 9 = \lambda^2 - 9\lambda - 22$$

Løsningene er

$$\lambda = \frac{9 \pm \sqrt{9^2 - 4(1)(-22)}}{2} = \frac{9 \pm \sqrt{169}}{2} = \frac{9 \pm 13}{2}$$

Løsningene er $\lambda_1 = -2$ og $\lambda_2 = 11$. En (ikke-null) egenvektor til egenverdien -2 er en vektor $\mathbf{v}$ slik at

$$\begin{bmatrix} 7-(-2) & 9 \\ 4 & 2-(-2) \end{bmatrix} \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

Vi velger egenvektoren $\mathbf{v_1} = [\mathbf{1}, -\mathbf{1}]^{\mathbf{T}}$. Vi skriver den som en transponert radvektor for å slippe å skrive søylevektoren (de tar så mye plass). En egenvektor til λ_2 er en vektor slik at

$$\begin{bmatrix} 7-(11) & 9 \\ 4 & 2-(11) \end{bmatrix} \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -4 & 9 \\ 4 & -9 \end{bmatrix} \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

Vi velger egenvektoren $\mathbf{v_2} = [\mathbf{9}, \mathbf{4}]^{\mathbf{T}}$. De to vektorene utspenner hele (de todimensjonale) vektorrommet. En diagonalisering er gitt ved

$$PDP^{-1}$$

hvor

$$D = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 11 \end{bmatrix} \text{ og } P = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \text{ og } P^{-1} = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 4 & -9 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

b)

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Den karakteristiske likningen er

$$(2-\lambda)^2 + 1 = 0.$$

Egenverdiene er $\lambda_1 = 2 - i$ og $\lambda_2 = 2 + i$, hvor $i^2 = -1$. Egenvektorer til $\lambda_1 = 2 - i$ er vektorer $\mathbf{v}$ slik at

$$\begin{bmatrix} 2-(2-i) & 1 \\ -1 & 2-(2-i) \end{bmatrix} \mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

Vi velger egenvektoren $\mathbf{v_1} = [\mathbf{i}, \mathbf{1}]^{\mathbf{T}}$. Tilsvarende velger vi egenvektoren til λ_2 (den kompleks konjugerte av λ_1 til å være den kompleks konjugerte til $\mathbf{v_1}$ som er $\mathbf{v_2} = [-\mathbf{i}, \mathbf{1}]^{\mathbf{T}}$. Disse egenvektorene utspenner hele vektorrommet (vi ser nå på vektorrommet over de komplekse tall). En diagonalisering er gitt ved

$$PDP^{-1}$$

hvor

$$D = \begin{bmatrix} 2-i & 0 \\ 0 & 2+i \end{bmatrix} \text{ og } P = \begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ og } P^{-1} = \frac{1}{2i}\begin{bmatrix} 1 & i \\ -1 & i \end{bmatrix}$$

c)

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Den karakteristiske likningen er en tredjegradsliking som ikke er så lett å løse med de tekninkker som vi har til rådighet. Vi benytter matlab til å finne egenverdiene og et sett med engenvektorer.

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Den karakteristiske likningen er $-(\lambda+1)(\lambda-3)^2 = 0$. Løsningene er $\lambda_1 = -1$ og $\lambda_2 = 3$. Egenvektorene til $\lambda_1 = -1$ er alle $[x, y, z]^T$ slik at

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

Her må $y = 0$ og $4x + z = 0$ så alle egenvektorene til λ_1 er på formen en skal ganget med vektoren $\mathbf{v_1} = [-\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{4}]^{\mathbf{T}}$. Egenvektorene til $\lambda_2 = 3$ er alle $[x, y, z]^T$ slik at

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

Her må både y og z være lik 0. Egenvektorene må derfor være på formen en skalar ganget med $[1, 0, 0]^T$. Underrommet av det tredimensjonale rommet av vektorer utspent av egenvektorene til matrisene er derfor bare todimensjonalt. Matrisen kan derfor ikke diagonaliseres.

d) Matrisen M er en 5×5 matrise gitt ved at

$$M_{i,j} = \frac{1}{i+j}$$

for i, j mellom 1 og 5. Gi svarene med fire gyldige desimaler eller mer. Her er det nyttig å bruke matlab til å skrive opp matrisen (for eksempel med for-løkker) samt til å utføre beregningene. Det er og lettere å lage en utskrift enn å skrive av resultatene dere får.

Se O3_2.m for forslag til løsning av del c) og d)

3

I denne oppgaven skal vi se på egenvektorer og egenverdier til symmetriske 2×2 matriser

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}$$

a) Finn et uttrykk for egenverdiene til A. Når er det to forskjellige egenverdier og når er det bare en egenverdi?

Den karakteristiske likningen er

$$(a-\lambda)(d-\lambda) - b^2 = \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - b^2) = 0.$$

Løsningene er

$$\lambda = (1/2)[(a+d) \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad-b^2)}] = (1/2)[(a+d) \pm \sqrt{(a-d)^2 + 4b^2}].$$

Vi har to forskjellige egenverdiern hvis $a \neq d$ eller $b \neq 0$. Det er bare en egenverdi når $a = d$ og $b = 0$. Egenverdien er da lik $a = d$.

b) Vis at egenverdiene må være relle tall når a, b og c er reelle tall.

Siden $(a-d)^2 + 4b^2 \geq 0$ for alle reelle tall a, b og c er egenverdiene alltid reelle tall.

c) Vis hvorfor den symmetriske matrisen har to lineært uavhengige egenvektorer selv om den bare har en egenverdi. Dette fører til at alle symmetriske matriser kan diagonaliseres. (Faktisk kan egenvektorene til enhver symmetriske matrise velges til å være ortogonale til hverandre. Vis gjerne dette hvis du vil.)

Hvis egenverdiene er forskjellige har vi to lineært uavhengige egenvektorer ved Teorem 2 i 5.1 i boka. Hvis vi bare har en egenverdi, da er $a = d$ og $b = 0$ (så matrisen er a ganget med identitesmatrisen!). I dette tilfellet er alle vektorer en egenvektor. Så alle symmetriske 2×2 matriser kan diagonaliseres ved Teorem 5 i 5.3 i boka.

(Når vi har bare en egenverdi kan vi velge de to egenvektorene fritt. Spesielt kan vi velge to slik som er ortonormale. Dvs. de har lengde 1, og er ortogonale til hverandre. Hvis $\mathbf{v_1}$ og $\mathbf{v_2}$ er to egenvektorer med forskjellige egenverdier λ_1 og λ_2, da må de være normale til hverandre: Anta vektorene er søylevektorer. Produkter $\mathbf{v_2^T A v_1}$ er lik $\lambda_1 \mathbf{v_2} \bullet \mathbf{v_1}$ Den transponerte av en skalar er skalaren selv. Derfor er $\lambda_1 \mathbf{v_2} \bullet \mathbf{v_1}$ lik

$$\mathbf{v_1^T A^T v_2} = \mathbf{v_1^T A v_2} = \boldsymbol{\lambda_2} \mathbf{v_2} \bullet \mathbf{v_1}$$

Hvis $\lambda_1 \neq \lambda_2$, da må $\mathbf{v_2} \bullet \mathbf{v_1} = \mathbf{0}$, og egenvektorene er ortogonale. Vi kan alltid finne en ortonormal basis for underrommet av egenvektorer for en gitt egenverdi.)

d) Anta at determinanten til en symmetrisk matrise er positiv. Determinanten til matrisen er produktet av egenverdiene. Så enten er begge egenverdiene positive eller så er begge egenverdiene negative. Vis følgende resultat for 2×2 symmetriske matriser med positiv determinant:

Begge egenverdiene er positive hvis og bare hvis begge diagonalelementene også er positive, og begge egenverdiene er negative hvis og bare hvis begge diagonalelementene også er negative.

Siden detminanten $\Delta = ad - b^2 = \lambda_1\lambda_2$ er positiv, så må også $ad > 0$. De to elementene a og d må ha samme fortegn, og de to egenverdiene λ_1 og λ_2 må også ha samme fortegn. Fortegnet må være det samme for begge parene siden egenverdiene er

$$\frac{(a+d) \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4\Delta}}{2}$$

(Hvis a og d er positive så er begge egenverdiene positive, hvis a og d er negative så er begge egenverdiene også negative.)

e) Anta determinanten til en symmetrisk matrise er negative. Må da produktet av diagonalemenetene være negativt? Vis dette eller finn et eksempel som viser at det ikke er sant.

Nei, produktet av diagonalelementene kan godt være positivt. For eksempel har matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

determinant -3, og egenverdier -1 og 3, men diagonalelementene er begge positive.

4

a) Vi ser litt på stabiliteten til matriseprodukt. Vi kan redusere dette til å se på stabiliteten til skalarproduktet siden element (i, j) i matriseproduktet er skalarproduktet av rad i til matrisen til venstre og søyle j til matrisen til høyre i produktet. La relativ feil til hver av elementene $x_1, x_2, \ldots x_n$ være r. Vis at relativ feil til skalarproduktet

$$[a_1, a_2, \ldots a_n] \bullet [x_1, x_2, \ldots x_n]$$

er (til første orden) begrenset av

$$\frac{\sum_{i=1}^n |a_i x_i|}{|\sum_{i=1}^n a_i x_i|} r$$

(forutsatt at $\sum_{i=1}^n a_i x_i$ er mye større enn endringen $\sum_{i=1}^n a_i \Delta x_i$). Spesielt, hvis alle elementene i begge vektorene har samme fortegn, så er relative feil til skalarproduktet også r (til første orden).

La den lille endringen i x_i være Δx_i. Vi har at $|\frac{\Delta x_i}{x_i}| < r$ (til første orden), for alle i. Avviket fra $\sum_{i=1}^n a_i x_i$ er derfor

$$\sum_{i=1}^n a_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^n a_i x_i (\Delta x_i / x_i)$$

Det største mulige avviket (i absoluttverdi) er derfor lik $r \sum_{i=1}^n |a_i x_i|$. Husk at Δx_i kan være både positiv og negativ. Det største utslaget får vi når Δx_i er størst mulig og enten har samme fortegn, eller motsatt fortegn, av a_i, for alle i.

Vi behøver antakelsen. Siden relativ feil blir gjerne regnet ut ved å bruke den målte verdien til størrelsen vi ser på. La A være størrelsen, og $\overline{A}$ den målte størrelsen med feil $\overline{A} - A = \Delta A$. Da er relativ feil $\Delta A/\overline{A} = \Delta A/(A \cdot (1 + \Delta A/A))$ som er tilnærmet $\Delta A/A$ når ΔA er mye mindre enn A (feilleddet blir $-(\Delta A)^2/A + \cdots$.)

b) Små endringer i et likningssystem kan få store konsekvenser for løsningene. Her er et enkelt eksempel

$$\begin{bmatrix} 1.000001 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ og } \begin{bmatrix} 1.000001 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.000001 \\ 1 \end{bmatrix}$$

har løsning hennholdsvis

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ og } \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

En relativ endring på en milliontedel i ene tallet i likningssystemet får store konsekvenser for løsningenen. I dette tilfellet er determinanten bare 10^{-6}.

Undersøk stabiliteten til likningssytemet

$$\begin{bmatrix} 2.35643 & 1.34252 \\ 5.86695 & 3.34255 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.69895 \\ 9.20949 \end{bmatrix}$$

hvis vektoren $[3.69895, 9.20949]$ endres litt. Forklar observasjonen.

En m-fil er tilgjengelig.

Dette eksempelet er helt tilsvarende det enkele eksempelet gitt ovenfor. bare at det er rotert slik at det ikke er så transparent. Determinanten er bare $-1.26\ldots 10^{-5}$. Inversmatrisen er omtrentlig

$$\begin{bmatrix} -2.649138102102673 & 1.064014266004960 \\ 4.649851397325777 & -1.867588666717866 \end{bmatrix} \cdot 10^5$$

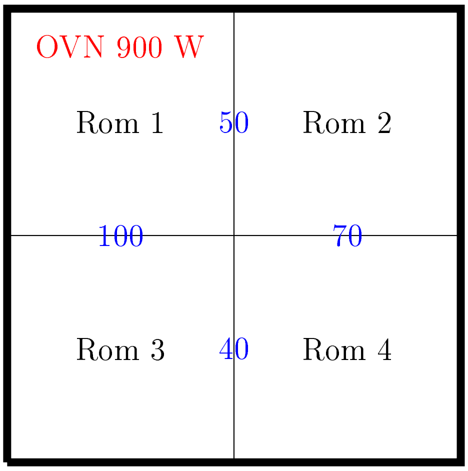
Vektoren $[3.69895, 9.20949]$ er valgt slik at den gir en vektor på størrelsesorden 1 når vi ganger med inversmatrisen. Svært små endringer i denne vektoren får derfor st ore følger. Endres vektoren med en tusendel i f orste koordinat endres løsningen med omtrent $[-26, 46]$.

En bør være klar over at selv om det er lineære likningssytem, og vi forventer at en liten feil inn gi en liten feil ut, så kan man være "uheldig" å få ustabile system. Dette skjer gjerne, som i eksemplene, det for hvor likningene er nesten linært avhengige.

5

En leilighet har fire rom. Det er bare en leilighet i hver etasje. Vi ser bort fra varmetap til leiligheten over og under vår leilighet. Det står en ovn som avgir 900 W i rom 1. Anta at temperaturen ute er $-5°C$ og at varmetapet utover, for hver av de fire rommene er proporsjonalt til temperaturdifferansen med varmeoverføringskoeffisient $10W/°C$. Mellom rommene er det ikke så godt isolert: Mellom rom 1 og 2 er varmeoverføringskoeffisienten $50W/°C$, mellom rom 1 og 3 er koeffisienten $100W/°C$, mellom rom 2 og 4 er koeffisienten $70W/°C$, mellom rom 3 og 4 er koeffisienten $40W/°C$. Temperaturen i rom 1 kan kalles T_1 etc.

Regn ut temperaturen i de fire rommene når temperaturen har stabilisert seg.



Hint: Sett opp et regnskap for varmetap for de fire rommene og løs likningsystemet. For eksempel for rom 3 er total varmetap lik 0 derfor må

$$10(T_{ute} - T_3) + 100(T_1 - T_3) + 40(T_4 - T_3) = 0.$$

(Vi tar ikke med enhetene.) Dette er det samme som

$$100T_1 + 0 \cdot T_2 - 150T_3 + 40T_4 = 50.$$

Det bør selvsagt brukes regneverktøy for å løse oppgaven. Tenk over om svaret du får er rimelig. For eksempel hva er gjennomsnittstemperaturen til de fire rommene?

Setter vi opp varmeregnskapet får vi matrisen.

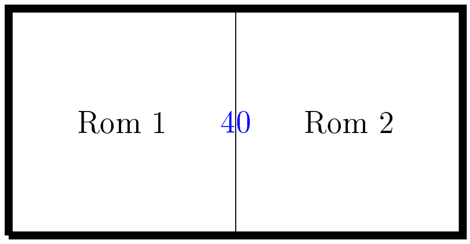
$$\begin{bmatrix} 0 & 70 & 40 & -120 \\ 100 & 0 & -150 & 40 \\ 50 & -130 & 0 & 70 \\ -160 & 50 & 100 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T1 \\ T2 \\ T3 \\ T4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 50 \\ 50 \\ -850 \end{bmatrix}$$

Løsningen er $T1 = 21.5°C$, $T2 = 15.8°C$, $T3 = 17.9°C$ og $T4 = 14.8°C$. Svaret virker rimelig.

Vi sjekker også at det stemmer overens med en mye enklere beregning vi kan gjøre for gjennomsnittstemperaturen til leiligheten. Gjennomsnittemperaturen er $17.5°C$ (regnet ut fra mer nøyaktige temperaturer enn de gjenngitt ovenfor). Dette er som forventet siden totalt varmetap er $40W/°C$ og varmekilden er $900W$. Varmetapsfaktoren er lik for de fire rommene og varmetapet er proporsjonal til temperaturdifferanse til utetemperaturen. Varmetapet er derfor lik gjennomsnittstemperatur - utetemperature ganget med $40W/°C$. Dette er $900W$ som forventet.

6

Vi skal nå se på hvordan temperaturen i en bolig endres over tid. Vi avgrenser oss til et enklere eksempel enn det foregående. La oss anta det er en hytte med to rom. Vi skal “skalke lukene” og forlater hytten med alle varmekilder avskrud. I rom 1 står det en klebersteinovn. Det er og satt inn mye vann i tubber og kar for å “holde på varmen”. Varmekapasiteten i rom 1 er derfor veldig høy. Når vi forlater hytten er temperaturen i rom 1 lik $20°C$ og i rom 2 er temperaturen lik $25°C$. Anta varmkapasiteten for rom 1 er $2MJ/°C$ (Mega betyr 10^6) og at varmekapasiteten for rom 2 er $0.2MJ/°C$. Ute er temperaturen $5°C$. varmeoverføringskoeffisienten mellom rommene er $40W/°C$. For begge rommene er varmeoverføringskoeffisienten $30W/°C$ til sammen for yttervegger (og vinduer etc.), golv og tak.



La utetemperaturen være T. Vi antar at den ikke endrer seg i løpet av det første døgnet. Vi har da likningsystemet

$$\begin{bmatrix} T1' \\ T2' \\ T' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -70 \cdot 3600/(2 \cdot 10^6) & 40 \cdot 3600/(2 \cdot 10^6) & 30 \cdot 3600/(2 \cdot 10^6) \\ 40 \cdot 3600/(2 \cdot 10^5) & -70 \cdot 3600/(2 \cdot 10^5) & 30 \cdot 3600/(2 \cdot 10^5) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T1 \\ T2 \\ T \end{bmatrix}$$

Faktoren 3600 kommer av at vi har endret enheter fra sekund til timer. Vi har at $s^{-1} = 3600h^{-1}$ hvor s er sekunde og h er timer.

For å løse de kobla lineære systemet bruker vi fremgangsmåten fra 5.7 i boka. Vi benytter matlab til å diagonalisere matrisen. I de nye koordinatene er de tre likningene ikke koblet sammen. Vi løser så differensiallikningene og “roterer tilbake” til det opprinnelige koordinatsystemet. Dette er gjort i O3_6.m.

a) Beskriv temperaturendringen for hver av rommene som en funksjon av tiden t med enhet timer. Tiden er lik 0 i det vi drar fra hytta. (En time er lik 3600 sekunder.)

Hva er temperaturen etter $6, 12, 18$ og 24 timer?

Etter 6 timer er temperaturen $T1 = 14.6°C$ og $T2 = 10.8°C$.

Etter 12 timer er temperaturen $T1 = 10.8°C$ og $T2 = 8.6°C$.

Etter 18 timer er temperaturen $T1 = 8.6°C$ og $T2 = 7.2°C$.

Etter 24 timer er temperaturen $T1 = 7.2°C$ og $T2 = 6.3°C$.

Svarene virker rimelige.

b) Er det mulig at temperaturen til rom 2 faktisk blir lavere enn temperaturen til rom 1? I så fall hvor lang tid tar det før det skjer?

Ja, vi ser at dette skjer ganske raskt. Vi prøver oss litt frem. Etter (litt mindre enn en) halvtime er temperaturen lik i de to rommene. (Dette kan lett regnes ut fra likningen $T1(t) = T2(t)$.

c) Hvor lang tid omtrentlig tar det før temperaturen i rom 1 er nede i $10°C$?

Vi har sett at etter 12 timer er temperaturen litt over $10°C$. Vi prøver oss litt frem. Temperaturen i rom 1 er $10°C$ når tiden er 13.9 timer. Dette er det samme som 13 timer og 54 minutter. (Likiningen $T1(t) = 10$ er ikke så lett å løse eksakt.)

7

I denne oppgaven ser vi på potensrekker av kvadratiske matriser.

1. Anta A er en $n \times n$ matrise som er slik at alle elementene i A^n går mot null når n blir stor.

   Anta A er diagonaliserbar. Gi et kriterie på egenverdiene til A som avgjør om A^n går mot null når n blir stor.

   Husk på at egenverdiene kan være komplekse tall.

   Elementene i A^n går mot null hvis $\lim_{n\to\infty} |\lambda|^n = 0$ for alle egenverdiene til A.

2. Forklar hvorfor rekken

$$\mathbf{1}_n + A + A^2 + A^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} A^n$$

   (hvor vi tolker A^0 som $\mathbf{1}_n$) eksisterer og er en $n \times n$ matrise som er lik inversmatrisen til $\mathbf{1}_n - A$.

   Produktet

$$(\mathbf{1}_n - A)(\mathbf{1}_n + A + A^2 + A^3 + \cdots + A^n) = \mathbf{1}_n - A^{n+1}$$

   som er når $\mathbf{1}_n$ når n er stor fra våre antakelser. Lar vi n gå mot uendelig får vi resultatet.

3. Finn inversmatirsen til

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.0001 & 0.0003 & 0 \\ 0.0005 & 1 & -0.0004 & 0.0005 \\ 0.0002 & 0 & 1 & -0.001 \\ 0 & -0.0006 & 0.0003 & 1 \end{bmatrix}$$

   med 4 desimalers nøyaktighet.

   Vi kan her benytte at matrisen er en liten endring (pertubasjon) av identitetsmatrisen. Til første orden er inversmatrisen til $\mathbf{1}_n - A$ lik $\mathbf{1}_n + A$. Annen ordens ledd og høyre gir ikke bidrag til de første 4 desimalene. Med 4 desimalers nøyaktighet i elementene er derfor inversmatrisen gitt ved

$$\begin{bmatrix} 1 & -0.0001 & -0.0003 & 0 \\ -0.0005 & 1 & 0.0004 & -0.0005 \\ -0.0002 & 0 & 1 & 0.001 \\ 0 & 0.0006 & -0.0003 & 1 \end{bmatrix}$$

8

La M være en vilkårlig $n \times n$ matrise. Vi kan definere eksponentfunksjonen av M ved å benytte potensrekkeutviklingen til eksponentfunksjonen.

$$\exp(M) = \mathbf{1}_n + A + A^2/2 + A^3/6 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} A^n/n!$$

For eksempel er $\exp(0) = \mathbf{1}_n$ og $\exp(\mathbf{1}_n) = e\mathbf{1}_n$. Hvis M er en 1×1 matise, altså en skalar, er $\exp(M)$ den vanlige eksponentfunksjonen.

1. La nå D være en 3×3 diagonal matrise med diagonalelementer $a_{11} = 1$, $a_{22} = -1$ og $a_{33} = i$, hvor $i^2 = -1$. Bestem $\exp(D)$.

$$\exp(M) = \begin{bmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cos(1) + i\sin(1) \end{bmatrix}$$

2. La

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Regn ut $\exp(M)$.

Dette kan regnes ut med matlab ved å benytte kommandoen expm.

Vi gjør det for hand. Matrisen er ganskel lik den vi hadde i Fibonacci eksempelet i forelesningen 8.04.2014. Egenverdiene er φ og $-1/\varphi = 1 - \varphi$, hvor $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2 \approx 1.618$ er det gyldne snitt. De tilfredstiller likningen $\lambda^2 = \lambda + 1$. En normal egenvektor til egenverdien φ er $[\varphi, 1]^T/\sqrt{\varphi + 2}$ og en normal egenvektor til egenverdien $-1/\varphi$ er $[1, -\varphi]/\sqrt{\varphi + 2}$. Merk deg at vektorene er ortonormale (matrisen vår er symmetrisk) og at normen til $[\varphi, 1]$ er $\sqrt{\varphi^2 + 1} = \sqrt{\varphi + 2}$.

En diagonalisering PDP^T av matrisen vår er derfor gitt ved

$$D = \begin{bmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & -1/\varphi \end{bmatrix} \text{ og } P = \frac{1}{\sqrt{\varphi + 2}} \begin{bmatrix} \varphi & 1 \\ 1 & -\varphi \end{bmatrix}$$

Siden $M^n = PD^nP^T$ så får vi

$$exp(M) = \frac{1}{\varphi + 2} \begin{bmatrix} \varphi & 1 \\ 1 & -\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \exp(\varphi) & 0 \\ 0 & \exp(-1/\varphi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi & 1 \\ 1 & -\varphi \end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{\varphi + 2} \begin{bmatrix} \varphi^2 e^{\varphi} + e^{-1/\varphi} & \varphi(e^{\varphi} - e^{-1/\varphi}) \\ \varphi(e^{\varphi} - e^{-1/\varphi}) & e^{\varphi} + \varphi^2 e^{-1/\varphi} \end{bmatrix}$$

Se også O3_8.m.

3. Er $\exp(A + B)$ lik $\exp(A) \cdot \exp(B)$ for alle $n \times n$ matriser A og B? Hvis ikke finn moteksempler, og gi kriterier som sikrer at likheten er gyldig. Er inversmatrisen til $\exp(A)$ lik $\exp(-A)$?

Dette er gyldig for matriser A og B som kommuterer. Siden A og A^{-1} kommuterer og $\exp(\mathbf{0_n})$ er identitetsmatrisen $\mathbf{1_n}$, så er inversmatrisen til $\exp(A)$ lik $\exp(-A)$.

Vi kan generere tilfeldige matriser og undersøke hva som skjer ved bruk av regneverktøy.

Vi gir nå et eksempel som viser at $\exp(A+B)$ typisk er forskjellig fra $\exp(A)\cdot\exp(B)$. Vi lager til et enkelt eksempel som illustrerer hva som går galt. La

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ og } B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Da er A^2 og B^2 begge lik 2×2 null-matrisen. Matrisene kommuterer ikke siden

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ og } BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vi har

$$\exp(\mathbf{A}) \cdot \exp(\mathbf{B}) = (\mathbf{1} + \mathbf{A})(\mathbf{1} + \mathbf{B}) = \mathbf{1} + \mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\exp(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathbf{1} + (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + (\mathbf{A} + \mathbf{B})^{\mathbf{2}}/\mathbf{2} + \cdots = \mathbf{1} + (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + (\mathbf{AB} + \mathbf{BA})/\mathbf{2} + \cdots$$

Siden $(A + B)^2$ er identitetsmatirsen kan vi regne dette ut

$$\exp(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cosh(\mathbf{1}) + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \sinh(\mathbf{1}) = \begin{bmatrix} \cosh(1) & \sinh(1) \\ \sinh(1) & \cosh(1) \end{bmatrix}$$

9

Vi kan benytte diagonalisering av matriser til å forstå og bevise andrederiverttesten for funksjoner av to variabler. Vi avgrenser oss til å se på kritiske punkt i $(0,0)$. Hvis en funksjon har et kritisk punkt i (a,b) kan vi forskyve variablene til henholdsvis $x+a$ og $y+b$ slik at det kritiske punktet er i $(0,0)$.

Anta at $f(x,y)$ er minst to ganger konktinuerlig deriverbar i $(0,0)$. Anta at $f(x,y)$ har et kristisk punkt i $(0,0)$ hvor begge første partiell deriverte er lik 0. Under disse antakelsene er Taylor rekken til f til andre orden gitt ved

$$f(0,0) + f_x(0,0)x + f_y(0,0)y + f_{xx}(0,0)x^2/2 + f_{yy}(0,0)y^2/2 + f_{xy}(0,0)xy =$$

$$f(0,0) + f_{xx}(0,0)x^2/2 + f_{yy}(0,0)y^2/2 + f_{xy}(0,0)xy.$$

1. Forklar hvorfor Hessematrisen

$$H = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{yx} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{bmatrix}$$

er symmertisk under betingelsene vi har gitt. Vis at Taylorrekkeutviklingen til andre orden er lik

$$f(0,0) + \frac{1}{2} v^T H v$$

hvor

$$v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Hessematrisen er symmetrisk siden $f_{xy} = f_{yx}$ i punktet vårt siden funksjonen der er minst to ganger kontinuerlig derivervar. Se 10.3.7 i Kalkulus boken.

$$\frac{1}{2}v^T Hv = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{yx} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \left(f_{xx}x^2 + f_{yy}y^2 + (f_{xy} + f_{yx})xy \right)$$

Siden $f_{xy} = f_{yx}$ følger påstanden.

2. Siden H er symmetrisk er H ortogonalt diagonaliserbar.

$$H = PDP^T$$

Hvor

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

og $P^{-1} = P^T$.

Vi skifter basis til

$$\begin{bmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \end{bmatrix} = P^T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

(rotasjon av aksene rundt origo). Forklar hvorfor Taylorrekkeutviklingen til andre orden i denne basisen er gitt ved

$$f(0,0) + \lambda_1 \overline{x}^2/2 + \lambda_2 \overline{y}^2/2.$$

Dette følger siden

$$\frac{1}{2}v^T Hv = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \overline{x}_1 & \overline{x}_2 \end{bmatrix} D \begin{bmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \end{bmatrix} = \lambda_1 \overline{x}^2/2 + \lambda_2 \overline{y}^2/2.$$

3. Benytt nå Oppgave 3 (del d) og bevis andrederiverttesten.

Andrederiverttesten er resultat 10.7.4 i Kalkulus boken.

Ved å rotere aksesystemet (sentrert i det kritiske punktet) vil funksjonen til andre orden se ut som

$$f(0,0) + \lambda_1 \overline{x}^2/2 + \lambda_2 \overline{y}^2/2.$$

Funksjonen har et lokalt maksimumspunkt i $(0,0)$ hvis begge egenverdiene er negative, et lokalt minimumspunkt hvis begge egenverdiene er positive, og et sadelpunkt hvis fortegnet til de to egenverdiene er forskjellige. Vi kan ikke si noe om hva som skjer hvis en av egenverdiene (eller begge) er lik null. Da må vi ta med høyere ordens ledd.

Hvis determinanten er positiv, vil fra Oppgave 3 d) fortegnet på egenverdiene være de samme som fortegnene på diagonalelementene. Derfor er det tilstrekkelig å sjekke fortegnet til f_{xx} (eller f_{yy}) for å bestemme fortegnet til egenverdiene, og avgjøre om vi har topp eller bunnpunkt.