Innlevering	BYPE2000 Matematikk 2000 HIOA
	Obligatorisk innlevering 3
Innleveringsfrist	Torsdag 24. april 2014 før forelesningen
Antall oppgaver:	9

1

Regn ut determinanten til følgende matriser. (Det er også en fin øving å finne invers-matrisene deres.)

a)

$$\begin{bmatrix} 19 & 20 \\ 20 & 21 \end{bmatrix}$$

b)

$$\begin{bmatrix} a & 3b \\ 4c & 9b \end{bmatrix}$$

c)

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

d)

$$\begin{bmatrix} 0 & 39 & -13 \\ 1 & -12 & 4 \\ 7 & 21 & -7 \end{bmatrix}$$

(Hint: Du kan spare deg for litt arbeid ved å benytte Thm. 3 i 3.2. Resultatet er også gyldig hvis rader erstattes av søyler.)

e)

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{bmatrix}$$

e)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

2

Finn egenverdiene og egenvektorer som utspenner egenrommet. Hvis egenrommet er hele vektorrommet skal dere også diagonalisere matrisen. Husk at egenverdier også kan være komplekse tall.

a)

$$\begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

b)

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

c)

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{eller} \quad \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

(Den andre av de to kan man regne med uten bruk av verktøy.)

d) Matrisen M er en 5×5 matrise gitt ved at

$$M_{i,j} = \frac{1}{i+j}$$

for i, j mellom 1 og 5. Gi svarene med fire gyldige desimaler eller mer. Her er det nyttig å bruke matlab til å skrive opp matrisen (for eksempel med for-løkker) samt til å utføre beregningene. Det er og lettere å lage en utskrift enn å skrive av resultatene dere får.

3

I denne oppgaven skal vi se på egenvektorer og egenverdier til symmetriske 2×2 matriser

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}$$

a) Finn et uttrykk for egenverdiene til A. Når er det to forskjellige egenverdier og når er det bare en egenverdi?

b) Vis at egenverdiene må være relle tall når a, b og d er reelle tall.

c) Vis hvorfor den symmetriske matrisen har to lineært uavhengige egenvektorer selv om den bare har en egenverdi. Dette fører til at alle symmetriske matriser kan diagonaliseres. (Faktisk kan egenvektorene til enhver symmetriske matrise velges til å være ortogonale til hverandre. Vis gjerne dette hvis du vil.)

d) Anta at determinanten til en symmetrisk matrise er positiv. Determinanten til matrisen er produktet av egenverdiene. Så enten er begge egenverdiene positive eller så er begge egenverdiene negative. Vis følgende resultat for 2×2 symmetriske matriser med positiv determinant:

Begge egenverdiene er positive hvis og bare hvis begge diagonalelementene også er positive, og begge egenverdiene er negative hvis og bare hvis begge diagonalelementene også er negative.

e) Anta determinanten til en symmetrisk matrise er negativ. Må da produktet av diagonalemenetene være negativt? Vis dette eller finn et eksempel som viser at det ikke er sant.

4

a) Vi ser litt på stabiliteten til matriseprodukt. Vi kan redusere dette til å se på stabiliteten til skalarproduktet siden element (i, j) i matriseproduktet er skalarproduktet av rad i til matrisen til venstre og søyle j til matrisen til høyre i produktet. La relativ feil til hver av elementene $x_1, x_2, \dots x_n$ være r. Vis at relativ feil til skalarproduktet

$$[a_1, a_2, \dots a_n] \bullet [x_1, x_2, \dots x_n]$$

er (til første orden) begrenset av

$$\frac{\sum_{i=1}^n |a_i x_i|}{|\sum_{i=1}^n a_i x_i|} r$$

(forutsatt at $\sum_{i=1}^n a_i x_i$ er mye større enn endringen $\sum_{i=1}^n a_i \Delta x_i$). Spesielt, hvis alle elementene i begge vektorene har samme fortegn, så er relative feil til skalarproduktet også r (til første orden).

b) Små endringer i et likningssystem kan få store konsekvenser for løsningene. Her er et enkelt eksempel

$$\begin{bmatrix} 1.000001 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ og } \begin{bmatrix} 1.000001 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.000001 \\ 1 \end{bmatrix}$$

har løsning hennholdsvis

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ og } \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

En relativ endring på en milliontedel i ene tallet i likningssystemet får store konsekvenser for løsningenen. I dette tilfellet er determinanten bare 10^{-6}.

Undersøk stabiliteten til likningssytemet

$$\begin{bmatrix} 2.35643 & 1.34252 \\ 5.86695 & 3.34255 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.69895 \\ 9.20949 \end{bmatrix}$$

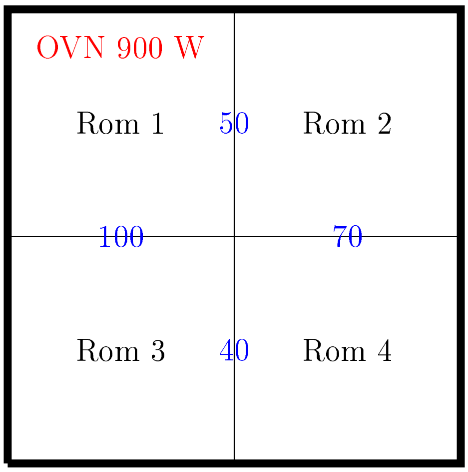
hvis vektoren $[3.69895, 9.20949]$ endres litt. Forklar observasjonen.

En m-fil er tilgjengelig.

5

En leilighet har fire rom. Det er bare en leilighet i hver etasje. Vi ser bort fra varmetap til leiligheten over og under vår leilighet. Det står en ovn som avgir 900 W i rom 1. Anta at temperaturen ute er $-5°C$ og at varmetapet utover, for hver av de fire rommene er proporsjonalt til temperaturdifferansen med varmeoverføringskoeffisient $10W/°C$. Mellom rommene er det ikke så godt isolert: Mellom rom 1 og 2 er varmeoverføringskoeffisienten $50W/°C$, mellom rom 1 og 3 er koeffisienten $100W/°C$, mellom rom 2 og 4 er koeffisienten $70W/°C$, mellom rom 3 og 4 er koeffisienten $40W/°C$. Temperaturen i rom 1 kan kalles T_1 etc.

Regn ut temperaturen i de fire rommene når temperaturen har stabilisert seg.



Hint: Sett opp et regnskap for varmetap for de fire rommene og løs likningsystemet. For eksempel for rom 3 er total varmetap lik 0 derfor må

$$10(T_{ute} - T_3) + 100(T_1 - T_3) + 40(T_4 - T_3) = 0.$$

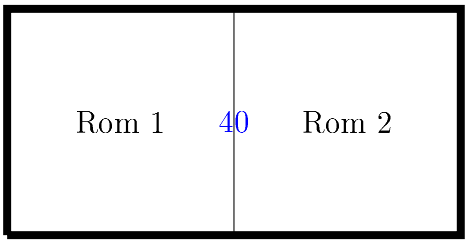
(Vi tar ikke med enhetene.) Dette er det samme som

$$100T_1 + 0 \cdot T_2 - 150T_3 + 40T_4 = 50.$$

Det bør selvsagt brukes regneverktøy for å løse oppgaven. Tenk over om svaret du får er rimelig. For eksempel hva er gjennomsnittstemperaturen til de fire rommene?

6

Vi skal nå se på hvordan temperaturen i en bolig endres over tid. Vi avgrenser oss til et enklere eksempel enn det foregående. La oss anta det er en hytte med to rom. Vi skal "skalke lukene" og forlater hytten med alle varmekilder avskrud. I rom 1 står det en klebersteinovn. Det er og satt inn mye vann i tubber og kar for å "holde på varmen". Varmekapasiteten i rom 1 er derfor veldig høy. Når vi forlater hytten er temperaturen i rom 1 lik $20°C$ og i rom 2 er temperaturen lik $25°C$. Anta varmkapasiteten for rom 1 er $2MJ/°C$ (Mega betyr 10^6) og at varmekapasiteten for rom 2 er $0.2MJ/°C$. Ute er temperaturen $5°C$. varmeoverføringskoeffisienten mellom rommene er $40W/°C$. For begge rommene er varmeoverføringskoeffisienten $30W/°C$ til sammen for yttervegger (og vinduer etc.), golv og tak.



a) Beskriv temperaturendringen for hver av rommene som en funksjon av tiden t med enhet timer. Tiden er lik 0 i det vi drar fra hytta. (En time er lik 3600 sekunder.)

Hva er temperaturen etter $6, 12, 18$ og 24 timer?

b) Er det mulig at temperaturen til rom 2 faktisk blir lavere enn temperaturen til rom 1? I så fall hvor lang tid tar det før det skjer?

c) Hvor lang tid omtrentlig tar det før temperaturen i rom 1 er nede i $10°C$?

7

I denne oppgaven ser vi på potensrekker av kvadratiske matriser.

1. Anta A er en $n \times n$ matrise som er slik at alle elementene i A^n går mot null når n blir stor.

   Anta A er diagonaliserbar. Gi et kriterie på egenverdiene til A som avgjør om A^n går mot null når n blir stor.

   Husk på at egenverdiene kan være komplekse tall.

2. Forklar hvorfor rekken

$$\mathbf{1}_n + A + A^2 + A^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} A^n$$

   (hvor vi tolker A^0 som $\mathbf{1}_n$) eksisterer og er en $n \times n$ matrise som er lik inversmatrisen til $\mathbf{1}_n - A$ (anta at A er diagonaliserbar).

3. Finn inversmatirsen til

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.0001 & 0.0003 & 0 \\ 0.0005 & 1 & -0.0004 & 0.0005 \\ 0.0002 & 0 & 1 & -0.001 \\ 0 & -0.0006 & 0.0003 & 1 \end{bmatrix}$$

   med 4 desimalers nøyaktighet (i hvert av elementene).

8

La M være en vilkårlig $n \times n$ matrise. Vi kan definere eksponentfunksjonen av M ved å benytte potensrekkeutviklingen til eksponentfunksjonen.

$$\exp(M) = \mathbf{1}_n + M + M^2/2 + M^3/6 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} M^n/n!$$

For eksempel er $\exp(0) = \mathbf{1}_n$ og $\exp(\mathbf{1}_n) = e\mathbf{1}_n$. Hvis M er en 1×1 matise, altså en skalar, er $\exp(M)$ den vanlige eksponentfunksjonen.

1. La nå D være en 3×3 diagonal matrise med diagonalelementer $a_{11} = 1$, $a_{22} = -1$ og $a_{33} = i$, hvor $i^2 = -1$. Bestem $\exp(D)$.
2. La
$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$
Regn ut $\exp(M)$.
3. Er $\exp(A + B)$ lik $\exp(A) \cdot \exp(B)$ for alle $n \times n$ matriser A og B? Hvis ikke finn moteksempler, og gi kriterier som sikrer at likheten er gyldig. Er inversmatrisen til $\exp(A)$ lik $\exp(-A)$?

9

Vi kan benytte diagonalisering av matriser til å forstå og bevise andrederiverttesten for funksjoner av to variabler. Vi avgrenser oss til å se på kritiske punkt i $(0, 0)$. Hvis en funksjon har et kritisk punkt i (a, b) kan vi forskyve variablene til henholdsvis $x + a$ og $y + b$ slik at det kritiske punktet er i $(0, 0)$.

Anta at $f(x, y)$ er minst to ganger konktinuerlig deriverbar i $(0, 0)$. Anta at $f(x, y)$ har et kristisk punkt i $(0, 0)$ hvor begge første partiell deriverte er lik 0. Under disse antakelsene er Taylor rekken til f til andre orden gitt ved

$$f(0,0) + f_x(0,0)x + f_y(0,0)y + f_{xx}(0,0)x^2/2 + f_{yy}(0,0)y^2/2 + f_{xy}(0,0)xy =$$

$$f(0,0) + f_{xx}(0,0)x^2/2 + f_{yy}(0,0)y^2/2 + f_{xy}(0,0)xy.$$

1. Forklar hvorfor Hessematrisen
$$H = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{yx} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{bmatrix}$$
er symmertisk under betingelsene vi har gitt. Vis at Taylorrekkeutviklingen til andre orden er lik
$$f(0,0) + \frac{1}{2} v^T H v$$
hvor
$$v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

2. Siden H er symmetrisk er H ortogonalt diagonaliserbar.

$$H = PDP^T$$

Hvor

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

og $P^{-1} = P^T$.

Vi skifter basis til

$$\begin{bmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \end{bmatrix} = P^T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

(rotasjon av aksene rundt origo). Forklar hvorfor Taylorrekkeutviklingen til andre orden i denne basisen er gitt ved

$$f(0,0) + \lambda_1 \overline{x}^2/2 + \lambda_2 \overline{y}^2/2.$$

3. Benytt nå Oppgave 3 (del d) og bevis andrederiverttesten.