Innlevering	BYPE2000 Matematikk 2000 HIOA
	Obligatorisk innlevering 2
Innleveringsfrist	Tirsdag 1. april 2014 kl. 12:45
Antall oppgaver:	8+2

1

Bestem den naturlige definisjonsmengden til følgende funksjoner. (Gjør gjerne oppgave 10.1: 1-4, 7, 13 i boken først.)

a)

$$f(x,y) = \frac{y}{x} - \frac{x}{y}$$

Den naturlige definisjonsmengden er $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0 \text{ og } y \neq 0\}$. Dette er alle punkt i planet bortsett fra dem som ligger på x eller y aksene.

b)

$$g(x,y) = \frac{xy}{x(x-2)(xy-4)}$$

Den naturlige definisjonsmengden er $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0, x \neq 2 \text{ og } y \neq 4/x\}$. Den naturlige definisjonsmengden er derfor alle punkt i planet bortsett fra dem som ligger på y aksene, linjen $x = 2$ samt grafen til $y = 4/x$.

c)

$$S(x,y,z) = \sqrt{4 - (x^2 + y^2 + z^2)}$$

Den naturlige definisjonsmengden er $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x^2 + y^2 + z^2) \leq 2^2\}$. Dette er alle punkt i rommet som ligger på eller inni kulen med radius 2 og senter i origo.

d)

$$h(x,y) = \frac{x - 2y}{\ln(x - 2y)}$$

Den naturlige definisjonsmengden er $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - 2y > 0 \text{ og } x - 2y \neq 1\}$. Dette er alle punkt i det åpne halvplanet under linjen $y = x/2$ bortsett fra linjen $y = (x-1)/2$

e)

$$f(x,y) = \sqrt{x + 2y} - 3\sqrt{-x}$$

Den naturlige definisjonsmengden er $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y \geq 0 \text{ og } x \leq 0\}$. Dette er alle punkt i det lukka halvplanet på eller over linjen $y = -x/2$ og på eller til venstre for y-aksen.

f)

$$R(x,y) = 3/\sqrt{9-(x+y)^2}$$

Den naturlige definisjonsmengden er $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, |x+y| < 3\}$. Dette er alle punkt i det åpne båndet mellom linjene $y = 3 - x$ og $y = -3 - x$.

2

Avgjør om grensene eksisterer og finn grenseverdien hvis den eksisterer. (Gjør oppgave 10.2: 1-4, 6 først.)

a)

$$\lim_{(x,y)\to(2,3)} \frac{x+y}{x^2-y}$$

Grensen til teller og nevner er henholdsvis lik 5 og 1. Fra gerenseverdisetningene eksisterer grensen og den er lik kvotienten av grensene. Grensen er lik $5/1 = \underline{5}$.

b)

$$\lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{|x+y|}{|x-1|+|y+1|}$$

Vi betrakter grensen vi får ved å nærme oss punktet fra diverse linjer gjennom punktet $(1,-1)$. Grensen langs hver av aksene $y = -1$ og $x = 1$, samt aksen $y = x - 2$ er alle lik 1. Derimot er grensen langs aksen $y = -x$ lik 0. Derfor eksisterer ikke grensen.

c)

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^3+yz^2}{x^2+y^2+z^2}$$

Legg merke til at både x^2 og z^2 er mindre enn eller lik $x^2+y^2+z^2$. Derfor er

$$\left|\frac{x^3+yz^2}{x^2+y^2+z^2}\right| \leq |x| + |y|.$$

Grensen eksisterer derfor og er lik $\underline{0}$.

d)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^3e^{-x^2-z}}{x^2+y^2+z^2}$$

Denne grensen eksisterer ikke. Langs y-aksen (set $x,z=0$) er grensen lik 0, mens langs x-aksen (set $y,z=0$) er grensen lik 1.

3

Finn tangentplanet, hvis det eksisterer, til følgende funksjoner i det oppgitte punktet. Tegn gjerne grafen til funksjonene. (Det er naturlig å gjøre ukes oppgaven til seksjonene 10.3 og 10.4 først.)

a) Finn tangentplanet til

$$f(x,y) = x^2 - y^3$$

i punktet $(-2,1)$

Gradienten til f er lik $\nabla f(x,y) = [2x, -3y^2]$. Funkjonen er derfor kontinuerlig deriverbar i alle punkt. I punktet $(-2,1)$ er gradienten lik $[-4,-3]$. Funksjonsverdien i punktet er $f(-2,1) = 3$. Tangentplanet eksisterer derfor og er gitt ved

$$z = -4(x+2) - 3(y-1) + 3 = -4x - 3y - 2.$$

b) Finn tangentplanet til

$$x\sin(xy) - 1$$

i punket $(\pi, 2)$

Gradienten til funksjonen er $\nabla f(x,y) = [\sin(xy) + xy\cos(xy), x^2\cos(xy)]$. Funksjonen er derfor kontinuerlig deriverbar i alle punkt. I punktet $(\pi,2)$ er gradienten lik $\nabla f(\pi,2) = [2\pi, \pi^2]$. Funksjonsverdien i punktet $(\pi,2)$ er lik -1. Tangentplanet eksisterer derfor og er gitt ved

$$z = 2\pi(x-\pi) + \pi^2(y-2) - 1.$$

c) Finn tangentplanet til

$$\begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Denne funksjonen har partiell deriverte i origo, som begge er lik 0. Men den er ikke kontinuerlig deriverbar rundt origo. Funksjonen er faktisk ikke kontinuerlig i origo. For eksempel er grensen når (x,y) nermer seg origo langs aksene lik 0, mens grensen langs linjen $x = y$ er lik $1/2$. Funksjonen har derfor ikke tangentplan i origo.

d) Finn tangentplanet til

$$\ln|xy^2 - x^2|$$

i punktet $(3,2)$

Funksjonsverdien i punktet $(3,2)$ er $f(3,2) = \ln(12-9) = \ln(3)$. Gradienten til funksjonen er $\nabla f(x,y) = [(y^2-2x)/(xy^2-x^2), 2xy/(xy^2-x^2)]$. Funksjonen er derfor kontinuerlig deriverbar i alle punkt nær $(3,2)$. (Nevneren er kontinuerlig og har verdi 3 i punktet $(3,2)$.) I punktet $(3,2)$ er gradienten lik $\nabla f(3,2) = [-2/3, 4]$. Tangentplanet eksisterer derfor og er gitt ved

$$z = (-2/3)(x-3) + 4(y-2) + \ln(3) = (-2/3)x + 4y - 6 + \ln(3).$$

4

Gjør oppgave 10.4.11 først. Se også notatene fra torsdag 27.02.

a) Finn den relative feilen (til første orden) for volumet til en boks hvor hver av sidene er målt med ein relativ nøyaktighet på henholdsvis 2%, 4% og 5%.

Den relative feilen til produktet (til første orden) er summen 2%+4%+5% = <u>11%</u> av de relative feilene.

b) Sentripetalkraften som virker på et legeme med masse m som svinger i en sirkulær bane med radius r (avstanden fra aksen til massesenteret) og fart v er $F = mv^2/r$. Anta at kraften måles med en relativ nøyaktighet på 2%, radius med en relativ nøyaktighet på 1%, og massen med en relativ nøyaktighet på 0.5%. Finn den relative feilen (til første orden) til farten v regnet ut fra $F = mv^2/r$. Forklar hvorfor den relative feilen er uavhengig av verdiene til F, m og r.

Vi har at $v = \sqrt{Fr/m} = F^{1/2}r^{1/2}m^{-1/2}$. Den relative feilen er derfor lik halvparten av summen av den relative feilen til hver av faktorene. (Se notatene.) Den er lik 1.75% (til første orden). Vi har ikke grunnlag for så stor nøyaktighet og det er mer rimelig å oppgi feilen som <u>1.8%</u>.

Relativ feil til x^{-1} er den samme som den relative feilen til x til første orden i feilen. Husk at $1/(1+\epsilon) = 1-\epsilon+\epsilon^2-+\cdots$. At kvadratrot halverer relative feil til første orden ser vi også fra potensrekkeutviklingen $\sqrt{1+x} = 1+x/2-x^2/8+-\cdots$.

5

(Gjør gjerne ukesoppgavene til kap 10.5 først.)

Høydefunksjonen i et terreng er rundt punktet P med koordinater $(20m, 49m, 100m)$ er modelert av følgende funksjon

$$z = f(x,y) = 1m^{-1/2}x\sqrt{y} - \sqrt{5yx} + 30m$$

Enhetene er her meter m.

a) Finn gradientvektoren til f.

Gradientvektoren er

$$\nabla F(x,y) = [1m^{-1/2}\sqrt{y} - (1/2)\sqrt{5y/x}, (1m^{-1/2}x - \sqrt{5x})/(2\sqrt{y})]$$

b) I hvilke retning er stigningen brattest nedover? Angi retningen med en retningsvektor. Hva er stigningstallet i denne retningen?

I punktet vårt er gradientvektoren lik <u>$[21/4, 5/7]$</u> (enhetsløs). Terrenget faller brattest i motsatt retning til gradientvektoren. Retningsverktoren er derfor enhetsvektoren med retningen $-[21/4, 5/7]$. Dette er vektoren <u>$[-147, -20]/\sqrt{22009}$</u>. Denne vektoren er tilnærmet lik $-[0.99, 0.13]$. Retningen er derfor nesten retningen til den negative x-aksen.

Stigningstallet i denne rettningen er minus absoluttverdien til gradienten til f. Den er lik <u>$-\sqrt{22009}/28$</u> ≈ 5.3. (Retningsderivert i motsatt retning av gradienten. Se siste del av 10,5, i boka.)

6

(Gjør gjerne ukesoppgavene til kap 10.6 først.)

a) Finn normalvektoren til flaten $z = x^3y - \ln|xy|$ i punktet $P = (1, 1, 1)$. Finn en likning for tangentplanet gjennom punktet P.

Gradienten til nivåkurven er $\nabla(x^3y - \ln|xy| - z) = [3x^2y - 1/x, x^3 - 1/y, -1]$. I punktet P er dette lik $[2, 0, -1]$. Tangentplanet gjennom P eksisterer siden gradienten er definert og kontinuerlig nær P, og tangentlinjen er gitt ved

$$2(x - 1) - (z - 1) = 2x - z - 1 = 0$$

b) Sjekk at punktet $P = (1, 1, 1)$ ligger på nivåflaten $F(x, yz) = -1$ hvor

$$F(x, y, z) = z^3 - zx^2 + x^3y^2 - 2y^3z$$

Finn normalvektoren til nivåflaten i punktet P.

Vi har at $F(1, 1, 1) = -1$ så punkett P ligger på nivåflaten. Gradienten til F er

$$\nabla F = [-2xz + 3x^2y^2, 2x^3y - 6y^2z, 3z^2 - x^2 - 2y^3]$$

Normalvektoren til nivåflaten i punktet P er gitt ved

$$\nabla F(P) = [1, -4, 0]$$

c) Snittet av flatene i a) og b) er en kurve. Punket P ligger på kurven. Finn (en parametrisering av) tangentvektoren til kurven i punktet P. Hva er stigningstallet til denne linjen (i forhold til xy-planet)?

Tangentlinjen står vinkelrett på begge normalvektorene til de to tangentplanene. En vektor som står vinkelrett på disse normalvektorene er vektorproduktet (kryssproduktet) av normalvektorene. Det er

$$[2, 0, -1] \times [1, -4, 0] = [-4, -1, -8]$$

En parametrisering av tangentlinjen er derfor gitt ved

$$[x, y, z] = [1, 1, 1] + [-4, -1, -8]t$$

for reelle tall t.

Stigningstallet til tangentlinjen når vi beveger oss langs tangentlinjen slik at x-komponenten er positiv er gitt ved $8/|[4, 1]| = 8/\sqrt{17}$.

7

(Gjør gjerne ukesoppgavene til kap 10.7 først.)

Gitt funksjonen

$$g(x, y) = 2x^3 + 6x^2 - 18y^2 + y^4$$

a) Bestem alle partielle deriverte av første og andre orden.

De første deriverte er

$$f_x = 6x^2 + 12x = 6x(x+2) \quad \text{og} \quad f_y = -36y + 4y^3 = 4y(y^2 - 9)$$

De andre deriverte er

$$f_{xx} = 12x + 12 \quad \text{og} \quad f_{yy} = 12(y^2 - 3)$$

og $f_{xy} = f_{yx} = 0$.

b) Bestem de kritiske punktene til funksjonen og avgjør om det er lokale maksimum eller minimumspunkt.

De kritiske punktene er der som $x = 0, -2$ og $y = 0, -3, 3$. Det er seks ulike muligheter.

1. I ekstremalpunktet $(0, 0, 0)$ er $f_{xx} = 12$ og $f_{yy} = -36$. Derfor er det et sadelpunkt.
2. I ekstremalpunktet $(0, -3, -81)$ er $f_{xx} = 12$ og $f_{yy} = 72$. Derfor er det et minimumspunkt.
3. I ekstremalpunktet $(0, 3, -81)$ er $f_{xx} = 12$ og $f_{yy} = 72$. Derfor er det et minimumspunkt.
4. I ekstremalpunktet $(-2, 0, 8)$ er $f_{xx} = -12$ og $f_{yy} = -36$. Derfor er det et maksimumspunkt.
5. I ekstremalpunktet $(-2, -3, -91)$ er $f_{xx} = -12$ og $f_{yy} = 72$. Derfor er det et sadelpunkt.
6. I ekstremalpunktet $(-2, 3, -91)$ er $f_{xx} = -12$ og $f_{yy} = 72$. Derfor er det et sadelpunkt.

8

(Gjør gjerne ukesoppgavene til kap 10.8 først.)

Gitt funksjonen

$$f(x, y) = xy^2 - x^2y + x$$

avgrenset til kvadratet gitt ved $0 \leq x, y \leq 2$.

a) Finn alle partielle deriverte av grad 1 og 2, samt diskriminanten

De første deriverte er

$$f_x = y^2 - 2xy + 1 \quad \text{og} \quad f_y = 2xy - x^2$$

De andre deriverte er

$$f_{xx} = -2y \quad \text{og} \quad f_{yy} = 2x$$

og

$$f_{xy} = f_{yx} = 2y - 2x$$

Diskriminanten er lik $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}f_{yx} = 4(xy - x^2 - y^2)$.

b) Hva er de kritiske punktene til f i det indre av kvadratet? I det indre av kvadratet er de kritiske punktene $(2/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 4/(3\sqrt{3}))$. Dette er løsningen til likningsystemet $f_x = 0$ og $f_y = 0$ i det indre av kvadratet. Diskriminanten i dette punktet er lik -4, så det er et sadelpunkt.

c) Hva er de lokale og de globale minimums og maksimumsverdiene til f?

Det er ingen slike punkt i det indre av kvadratet. Ekstremalverdi setningen gir at det finnes globale maksismumspunkt og minimumspunkt på kvadratet (funksjonen er kontinuerlig på et lukket og begrenset område av planet).

Vi undersøker hva som sker på randen.

1. Linjestykke $x = 2$ og $0 \leq y \leq 2$. Der er funksjonen lik $f(2, y) = 2y^2 - 4y + 2 = 2(y-1)^2$. Denne funksjonen er minst, med verdi 0, på linjen i $(2, 1)$, og størst i endepunktene $(2, 0)$ og $(2, 2)$ hvor den er lik 2.
2. Linjestykke $x = 0$ og $0 \leq y \leq 2$. Der er funksjone lik 0 for alle y.
3. Linjestykke $y = 0$ og $0 \leq x \leq 2$. Der er funksjonen lik $f(x, 0) = x$. Funksjonen er minst i $(0, 0)$ og størst, med verdi 1, i $(2, 0)$.
4. Linjestykke $y = 2$ og $0 \leq x \leq 2$. Der er funksjonen lik $f(x, 2) = 5x - 2x^2 = -2((x - 5/4)^2 - (5/4)^2)$. Funksjonen er størst i $(5/4, 2)$, der er verdien lik $25/8$. Funksjonen er minst i $(0, 2)$, der er verdien lik 0.

Funksjonen er 0 eller positiv på randen. Siden den ikke har noe lokalt minimum i det indre, er den derfor større eller lik 0 over hele kvadratet (dette er kanskje ikke helt opplagt når vi ser på funksjonen).

Hele siden $x = 0$ og $0 \leq y \leq 2$ samt punktet $(2, 1, 0)$ er globale minimumspunkter. Punktet $(5/4, 2)$ er et globalt maksimumspunkt. Den globale maksimumsverdien er $25/8$.

Det gjenstår å sjekke hjørnene $(2, 0)$ og $(2, 2)$. Funksjonen er økende inn mot hjørnet $(2, 0)$, både langs x- og y-aksen. Derfor er punktet $(2, 0)$ et lokalt maksimumspunkt med verdi 2. Derimot er funksjonen avtagende når vi går inn mot hjørne $(2, 2)$ langs linjen $y = 2$, mens den er økende når vi går langs linjen $x = 2$. Derfor er ikke $(2, 2, 2)$ et lokalt ekstremalpunkt.

De to siste oppgavene er frivillige.

9

(Denne oppgaven er tilsvarende 10.3.5.) Gitt funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} \frac{xy(x+y)}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

a) Regn ut de første ordens partiell deriverte til $f(x, y)$ for alle punkt. Er de kontinuerlige funksjoner i origo?

I origo er $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$. Vekk fra origo så er

$$f_x(x,y) = \frac{2xy^3 - x^2y^2 + y^4}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_y(x,y) = \frac{2yx^3 - x^2y^2 + x^4}{(x^2+y^2)^2}$$

De partiell deriverte eksisterer i alle punkt, men de er ikke kontinuerlig i origo. Det kan vi for eksempel se ved å benytte polare koordinater. Rundt origo så er de partiell deriverte uavhengige av r og avhengige av vinkelen t som $f_x(r\cos t, r\sin t) = \cos t \sin^3 t - \cos^2 t \sin^2 t + \cos^4 t$. Dette er opplagt ikke kontinuerlig i origo.

b) Har funksjonen et tangentplan (lineær tilnærming i origo)? Hvis ikke, forklar hvorfor Resultatet 10.4.3. i boka ikke er gyldig.

Nei funksjonen har ikke noe tangentplan i origo. Funksjonen er ikke kontinuerlig deriverbar i origo, så resultatet om lineær tilnærming 10.4.3 er ikke gyldig.

Tegn gjerne grafen. Du vil da se at grafen bølger rundt origo, og at det ikke er mulig å bestemme et tangentplan der.

10

Her er en funksjon som har egenskapen at f_{xy} er forskjellig fra f_{yx} i origo.

Vi definerer følgende funksjon

$$f(x) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Regn ut første ordens partiell deriverte for alle punkt. Er de partiell deriverte kontinuerlige i alle punkt?

I origo så er de partiell deriverte lik 0 (ved å benytte definisjonen av de partiell deriverte). Vekk fra origo så er de partiell deriverte lik

$$f_x(x,y) = \frac{x^4y - 2x^3y^2 + 4x^2y^3 + 2xy^4 - y^5}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_y(x,y) = -\frac{xy^4 - 2x^2y^3 + 4x^3y^2 + 2x^4y - x^5}{(x^2+y^2)^2}$$

De første ordens partiell deriverte er kontinuerlige for alle (x,y).

b) Regn ut de andre ordens partiell deriverte i origo.

Ved definisjonen av de partiell deriverte er

$$f_{xy}(0,0) = (f_x)_y = -1$$

og

$$f_{yx}(0,0) = (f_y)_x = 1$$

Grunnen til at konklusjonen i 10.3.7 feiler er at selv om begge de partiell deriverte f_{xy} og f_{yx} eksisterer for alle (x, y) så er de ikke kontinuerlige i origo. Så betingelsen i 10.3.7 er ikke oppfylt.