3.04.2014 5.3 Diagonalisering

(1) To $n \times n$-matriser $A, B$ så sier vi at de er konjugerte ("similar") hvis det finnes en inverterbar Matrise $P$ slik at

$$A = PBP^{-1}$$

$$(\text{samme som } P^{-1}AP = B)$$

$A$ er konjugert til $A$

Hvis $A$ og $B$ konjugerte og $B$ og $C$ er konjugerte, da er $A$ og $C$ også konjugerte.

$$A = PBP^{-1} \qquad B = QCQ^{-1}$$

$$A = P(QCQ^{-1})P^{-1} = (PQ)C(PQ)^{-1}$$

$$(\text{siden } (PQ)^{-1} = Q^{-1}P^{-1}).$$

Så $A$ og $C$ er konjugerte.

Identitets matrisen er bare konjugert til seg selv.

Hvis $A$ og $B$ er konjugerte, så er $\det A = \det B$

$$A = PBP^{-1} \qquad \text{Bytter rekkefølge} \quad \det(M \cdot N) = \det(N \cdot M)$$

$$\det(A) = \det((PB) \cdot P^{-1}) = \det(P^{-1} \cdot (PB))$$
$$= \det(1_n \cdot B) = \det(B)$$

Den karakteristiske likningen til konjugerte matriser er like.

② $A = PBP^{-1}$

$$\det(A - \lambda \mathbb{1}_n) = \det(PBP^{-1} - \lambda \mathbb{1}_n)$$
$$= \det(PBP^{-1} - \lambda P \cdot \mathbb{1}_n \cdot P^{-1}) = \det(P(B - \lambda \mathbb{1}_n)P^{-1})$$
$$= \det(B - \lambda \mathbb{1}_n).$$

---

En matrise $M$ er <u>diagonaliserbar</u> hvis det finnes en diagonal matrise $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$ og en inverterbar matrise $P$ slik at $M = PDP^{-1}$.

(d.v.s er konjugert til en diagonal matrise)

$M = PDP^{-1}$ kalles en <u>diagonalisering</u> av $M$.

Ganger med $P$ på høyre side

$M = PDP^{-1}$ er ekvivalent til $M \cdot P = P \cdot D$.

La $P = [\vec{V}_1, \dots, \vec{V}_n]$, da er

$$MP = [M\vec{V}_1, M\vec{V}_2, \dots, M\vec{V}_n]$$

$$P \cdot D = [\vec{V}_1, \dots, \vec{V}_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix} = [\lambda_1\vec{V}_1, \lambda_2\vec{V}_2, \dots, \lambda_n\vec{V}_n]$$

så $MP = P \cdot D$ hvis og bare hvis

$M\vec{V}_1 = \lambda_1\vec{V}_1$, $M\vec{V}_2 = \lambda_2 V_2$, ... $M\vec{V}_n = \lambda_n V_n$

Dette sier av $\vec{V}_i$ er en egenvektor med

3 egenverdi $\lambda_i$ (til $M$).

Resultat $M$ er diagonaliserbar $\Leftrightarrow$

Egenvektorene til $M$ utspenner hele vektorrommet
(hvis ikke blir ikke $P$ inverterbar)

Hvis $M = PDP^{-1}$, da er

$$\det M = \det(D) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n$$

Eksempel Matrisen $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ kan ikke diagonaliseres.

Matrisen $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ er inverterbar, men den kan ikke diagonaliseres

(Se forelesningen 1.04.2014)

En $n \times n$-matrise med $n$ forskjellige egenverdier kan diagonaliseres.

Dette følger siden $n$ egenvektorer til de $n$ forskjellige egenverdier må være lineært uavhengige. Da utspenner de hele vektorrommet.

(4) En $n \times n$ matrise $M$ er symmetrisk hvis

$M = M^T$ $\qquad m_{ij} = m_{ji}$ for alle $i$ og $j$.

$M$ er normal hvis $\quad M M^T = M^T M$
(svakere kriterie enn symmetrisk.)

En matrise $P$ er ortogonal hvis

$$P^T = P^{-1}$$

$P = [\vec{V}_1, \dots, \vec{V}_n]$ ortogonal hvis

$$\vec{V}_i \cdot \vec{V}_j = 0 \quad i \neq j$$

$$\vec{V}_i \cdot \vec{V}_i = |\vec{V}_i|^2 = 1.$$

Resultat Alle symmetriske (og normale) matriser er diagonaliserbare og vi kan velge en ortogonal matrise til å konjugere med

$$M = P D P^{-1} \qquad P^{-1} = P^T$$

5

**Eksempel** Kan den øvre triangulære matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$ diagonaliseres?

Hvis så, finn en diagonalisering.

Egenverdiene til $A$ er $1, 2, 3$

Tre ulike verdier, så $A$ kan diagonaliseres.

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad P = [\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3]$$

$\vec{V}_i$ er en $(\neq \vec{0})$ egenvektor til $\lambda_i$ $i = 1, 2, 3$.

$\lambda_1 = 1$:
$$A - \lambda_1 \mathbb{1}_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Egenvektoren til $\lambda_1$ er vektoren $\vec{V}$ s.a

$$(A - \lambda_1 \mathbb{1}_n)\vec{V} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\vec{V} = 0.$$

Egenvektoren $\vec{V}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ (og skalar mult. av denne)

$\lambda_2 = 2$
$$A - 2\mathbb{1}_3 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{V}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\lambda_3 = 3$ $\qquad A - 3\mathbb{1}_3 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(6)

$$\vec{V}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vi finner nå $P^{-1}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ ]-1 \\ \\ \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} ]-1 \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ ]-1 \\ \\ \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{1}_3 \qquad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = P^{-1}$$

Diagonaliseringen:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{P^{-1}}$$

Oppgave: Diagonaliser

7

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Den karakteristiske ligningen er:

$$\det(M - \lambda \mathbb{1}_2) = \det\begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 1.$$
$$= (\lambda-1)(\lambda+1).$$

Egenverdiene er $-1$ og $1$.

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$ (valgt en rekkefølge av egenverdiene)

Egenvektorer

$\lambda = 1$ : $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\vec{V} = \vec{0}$ $\vec{V}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}$

$|\vec{V}_1| = 1$

$\lambda = -1$ : $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\vec{V} = \vec{0}$ $\vec{V}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$P^{-1} = P^T = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$
$$= P$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$