25.03.2014 2.1 og 3.1 Lay

1

$m \times n$- matrise

$$\begin{array}{c} \text{RADER} \rightarrow \\ \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & a_{22} & \vdots \\ & \ddots & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{S} \\ \text{Ø} \\ \text{Y} \\ \text{L} \\ \text{E} \\ \text{R} \downarrow \end{array}$$

$m \times 1$- matrise
$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$$
kalles også søylevektor

$1 \times n$ - matrise
$$\begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$
kalles også radvektor

I $\mathbb{R}^m$ med standard basis $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_m$

$\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$ representerer vektoren

$a_1\vec{e}_1 + \cdots + a_m\vec{e}_m$ i $\mathbb{R}^m$

Multiplikasjon av matriser

A $m \times n$ - matrise og B er en $n \times r$ - matrise

så er AB en $m \times r$ - matrise

Elementet $i.j$ i AB er $\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}$.

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 \\ \vdots \\ \vec{a}_m \end{bmatrix}} \underset{B}{\begin{bmatrix} \vec{b}_1 & \cdots & \vec{b}_r \end{bmatrix}} = \underset{AB}{\begin{bmatrix} & & \\ & \vec{a}_i \cdot \vec{b}_j & \\ & & \end{bmatrix}}$$

(i.j)

prikk (skalar) produkt.

Eksempel på matrise multiplikasjon

(2)

$$\underset{3\times 2}{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}} \underset{2\times 3}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 \\ -1 & 4 & 13 \\ -1 & 6 & 21 \end{bmatrix}$$

$$\underset{2\times 3}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}} \underset{3\times 2}{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 16 & 20 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

③ $T : V \to W$ Lineær trans. T mellom to vektor rom V og W

$$T(V_1 + V_2) = T(V_1) + T(V_2)$$

$$T(r \cdot V) = r\,T(V) \qquad r \in \mathbb{R}$$

"T respekterer sum og skalarmultiplikasjon."

$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ standard basis for vektorrommene.

Alle vektorer i $\mathbb{R}^n$ er på formen $\sum a_i \vec{e}_i$

$$T(\sum a_i \vec{e}_i) = \sum T(a_i \vec{e}_i) = \sum a_i T(\vec{e}_i).$$

T er bestemt av hva den gjør med basisvektorene.

$T(e_i)$ er en vektor i $\mathbb{R}^m$:

$$T(\vec{e}_i) = \sum_j T_{ji} \, \vec{e}_j$$

$$T(\sum a_i e_i) = \sum_{i,j} a_i T_{ji} \, \vec{e}_j .$$

Dette er resultatet av matrise multiplikasjonen

$$\begin{bmatrix} T_{ji} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

Sammensetning av to lineære transformasjoner svarer til matrisemultiplikasjon av tilhørende transformasjons matriser.

(4) $\mathbb{R}^n \xrightarrow{T} \mathbb{R}^m \xrightarrow{S} \mathbb{R}^r$

$S \circ T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^r$ er også en lin. trans.

$\vec{e}_i$ i $\mathbb{R}^n$ sendes til $T(\vec{e}_i) = \sum_{j=1}^{m} T_{ji}\,\vec{e}_j$ i $\mathbb{R}^m$.

$\vec{e}_j$ i $\mathbb{R}^m$ sendes til $S(\vec{e}_j) = \sum_{k=1}^{r} S_{kj}\,\vec{e}_k$

Sammensetningen:

$$
\begin{aligned}
S \circ T(\vec{e}_i) &= S\Big(\sum_{j=1}^{m} T_{ji}\,\vec{e}_j\Big) \\
&= \sum_{j=1}^{m} T_{ji}\; S(\vec{e}_j) \\
&= \sum_{k=1}^{r} \sum_{j=1}^{m} T_{ji}\; S_{kj}\; \vec{e}_k \\
&= \sum_{k=1}^{r} \underbrace{\Big(\sum_{j=1}^{m} S_{kj} \cdot T_{ji}\Big)}_{\text{element } (k,i)}\; \vec{e}_k
\end{aligned}
$$

til $S \cdot T$ ganget sammen med matrisemultiplikasjon.

Søyle nr. i i matrisen $S \cdot T$:

$$
\begin{bmatrix} \sum_j S_{1j} T_{ji} \\ \vdots \\ \sum_j S_{rj} T_{ji} \end{bmatrix} = S \cdot T \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

posisjon i svarer til $\vec{e}_i$

Venstremult. med $\vec{e}_i$ plukker ut søyle nr. i.

⑤ A $n \times n$ matrise

A^{-1} en invers matrise hvis

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} A = 1_n = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

1_n identitetsmatrisen. (svarer til identites transformasjonen $T(\vec{x}) = \vec{x}$ for alle $\vec{x}$)

$$A \cdot 1_n = 1_n \cdot A = A.$$

$$[A \mid 1_n] \xrightarrow{\text{radoperasjoner}} [1_n \mid A^{-1}]$$

(når A inverterbar)

Likningssystem med n likninger og n ukjente

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n = b_1$$
$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$
$$a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \cdots + a_{nn} x_n = b_n$$

$$A\vec{x} = \vec{b}.$$

Likningssystemet har en entydig løsning
$\Leftrightarrow$ A er inverterbar.

Den er da $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$.

6

3.1 Determinanter

$\det(A) = |A|$ determinanten til A.

Det er en skalar.

Vi har bare en definisjon av determinanten for $n \times n$ - matriser.

2×2-matrise $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = 4 - 6 = -2.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 2 = 0$$

1×1-matrise $[a]$ $|[a]| = a.$

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}\det\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$- a_{12}\det\begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{13}\det\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

Eksempel

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}$$

$$+ 3\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = (45 - 48) - 2(36 - 42)$$

$$+ 3(32 - 35) = -3 - 2(-6) + 3(-3)$$

$$= -3 + 12 - 9 = 12 - 12 = 0$$

(8) A $n \times n$ - matrise

i,j - minor til A er $(n-1) \times (n-1)$ - matrisen hvor vi har fjernet rad nr. i og søyle nr. j

(i,j) - kofaktor til A, C_{ij} er
$(i.j)$ - minor til A ganget med $(-1)^{i+j}$

For 3×3 - matriser var

$$\det A = a_{11} \cdot |C_{11}| + a_{12} \overbrace{|C_{12}|}^{-(1.2)-\text{minoren}} + a_{13} |C_{13}|$$

Generelt for $n \times n$ - matriser definere vi

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{1i} |C_{1,i}| .$$

Rekursiv definisjon.

Antall ledd i $\det A$ er $n!$

Eksempel: 2×2 - matrise

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot (d) + b \overbrace{((-1)^{1+2} \cdot c)}^{\text{kofaktor}}$$

$$= \underline{ad - bc} .$$

Resultat Vi kan også regne ut $\det A$ ved å bruke rad i istedet for rad 1.

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \, |C_{ij}|$$

Vi kan også benytte kolonner istedet for rader.

⑨ Diagonal matrise $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$

$\det(D) = \lambda_1 \cdots \lambda_n$

$\det(\mathbb{1}_n) = 1 \cdot 1 \cdots 1 = \underline{1}$

"velger rad 2"

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 2 \\ 13 & 4 & 7 \end{bmatrix} = (-1)^{2+3} \cdot 2 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 13 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= -1 \cdot 2 \left(4 - 4 \cdot 13\right)$$

$$= -2\,(-4 \cdot 12) = \underline{\underline{96}}$$