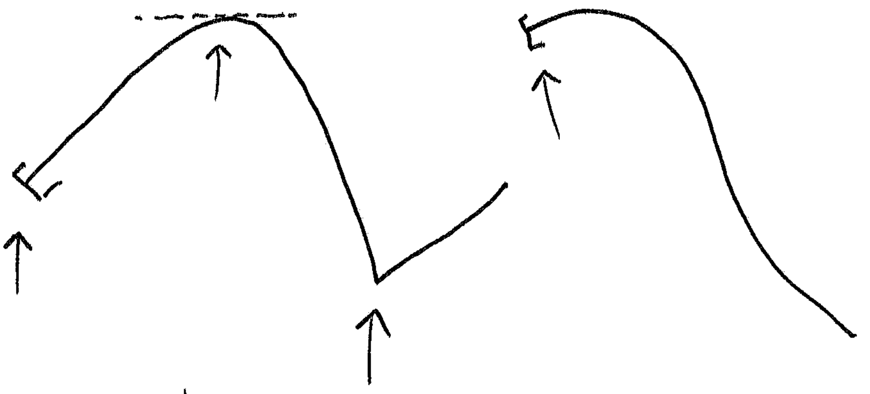
18.03.2014

10.8 Kritiske punkt og ekstremalpunkt

(10.9 er ikke pensum)

1. 1.variabel



Kritiske punkter : 1) $f'(x) = 0$

2) endepunkt

3) punkt hvor $f'(x)$ ikke eksisterer.

Ekstremalpunkt er kritiske punkt. Så det er tilstrekkelig å undersøke de kritiske punktene for å finne ekstremalpunktene.

Flere variabler

Kritiske punkter 1) $\vec{\nabla} f = 0$ (og f er kont. deriverbar.)

2) punkt hvor f ikke er kont. deriverbar

3) kritiske punkter på randen.

La f være en funksjon med definisjonsmengde D
Et punkt $\vec{a}$ i D er et globalt maksimumspunkt hvis $f(\vec{a}) \geq f(\vec{x})$ for alle $\vec{x}$ i D.

2 Et punkt $\vec{a}$ i D et et globalt minimumspunkt hvis $f(\vec{a}) \leq f(\vec{x})$ for alle $\vec{x}$ i D.

Ekstremalverdisetningen.

Hvis f er en kontinuerlig funksjon på en lukket begrenset delmengde D i $\mathbb{R}^n$, da har f både maksimums og minimumspunkt.

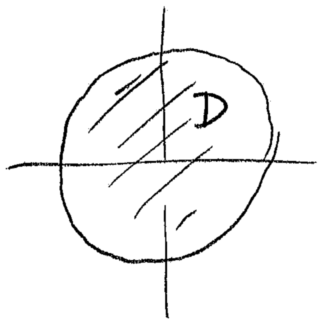
Hvis vi vet at det finnes globale ekstremalpunkt kan vi finne dem som de kritiske punktene hvor funksjonsverdiene er størst og minst.

③

Eksempel

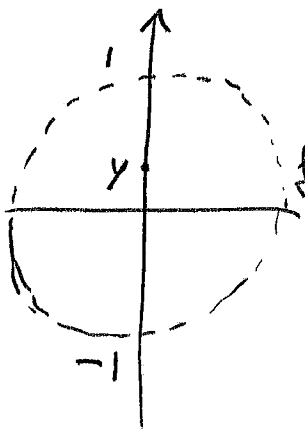
Finn ekstremalpunktene til $f(x,y) = x^2 + y$

på delmengden D (av $\mathbb{R}^2$) gitt ved $x^2 + y^2 \le 1$.



Finner de kritiske punktene:

$$\vec{\nabla} f = [2x, 1] \neq \vec{0} \quad \text{for alle } (x,y).$$



Randen er $x^2 + y^2 = 1$

$x^2 = 1 - y^2$

På randen:
$f(x,y) =$
$x^2 + y = \underline{1 - y^2 + y}$
(uavhengig av fortegnet til x: symmetrisk om y-aksen)

Deriverer $1 - y^2 + y$ m.h.t. y : $\underline{-2y + 1}$.

Den deriverte er null når $\underline{y = 1/2}$. (da er $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$)

I tillegg har vi endepunktene hvor $y = -1$ og $y = 1$.

De kritiske punktene til f på D er

$\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $(0,-1)$ og $(0,1)$.

f har globale ekstremalverdier på D siden f er kont. og D er lukket og begrenset.

$f\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \underline{\frac{5}{4}}$, $f(0,-1) = -1$ $f(0,1) = 1$

globale maks.punkter — global maks.verdi — globalt min.punkt — global min.verdi

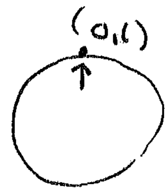
Alternativt kunne vi ha parametrisert randen:

4 $(x,y) = (\cos t, \sin t)$ $\quad 0 \le t \le 2\pi$.

$f(x,y) = \cos^2 t + \sin t$.

Og deretter funnet kritiske punkt til denne funksjonen.

$\nabla f(0,1) = [0,1]$ så $(0,1)$ er et lokalt maks. punkt



Finn ekstremalpunktene til

$f(x,y) = x^2 - 2x + y^2 - y + 2$

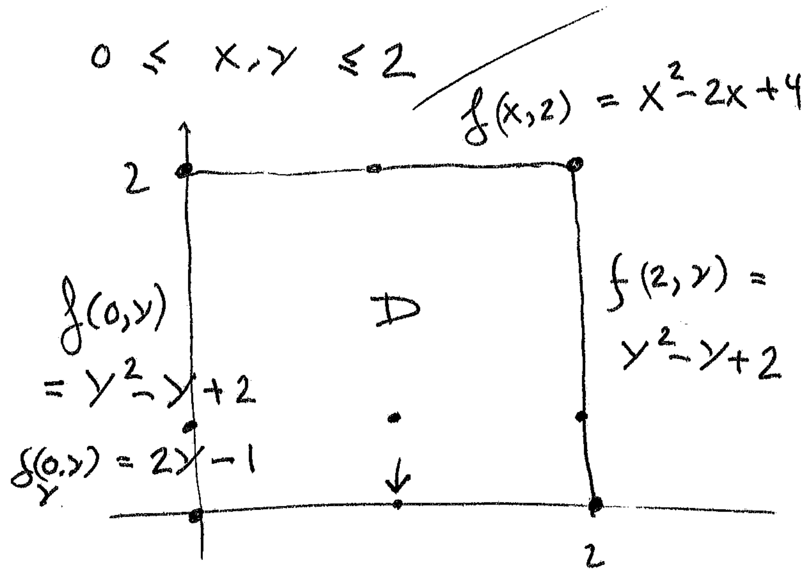
på delmengden D av $\mathbb{R}^2$ gitt ved

$0 \le x, y \le 2$

$\vec{\nabla} f = [2x-2,\ 2y-1]$

$\vec{\nabla} f = \vec{0}$ i punktet

$\underline{(1, \tfrac{1}{2})}$



Randen er naturlig å dele opp i de fire sidene

$f(x,0) = x^2 - 2x + 2$

$f_x(x,0) = 2x - 2$.

Det er 9 kritiske punkter.

(5) $f(1, \frac{1}{2}) = 1 - 2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} + 2 = \underline{3/4}$ indre punkt i D

$\overline{\text{(indre av sidene)}}$

$f(1,0) = \underline{1}$

$f(1,2) = 1 + 2 = \underline{3}$

$f(0, \frac{1}{2}) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} + 2 = \frac{-1}{4} + \frac{8}{4} = \underline{7/4}$

$f(2, \frac{1}{2}) = \underline{7/4}$

$\overrightarrow{\text{(hjørnene)}}$

$f(0,0) = \underline{2}$ $\quad \vec{\nabla} f(0,0) = [-2,-1]$

lokal maks.

$f(2,0) = \underline{2}$, $\quad \vec{\nabla} f(2,0) = [2,-1]$

lokal maks.

$f(2,2) = \underline{4}$

$f(0,2) = \underline{4}$

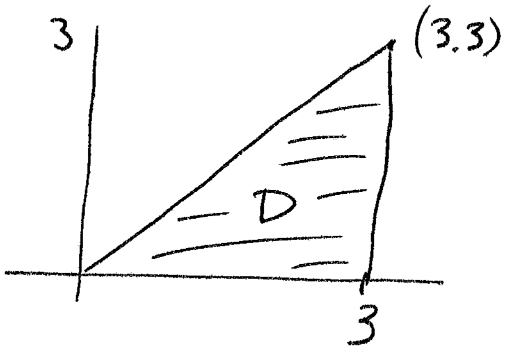
Siden f er en kont. funksjon og D er lukket og begrenset gir ekstremalverdisetningen at 4 er den globale maksimumsverdien og 3/4 er den globale minimumsverdien.

Hjørnene $(0,2)$ og $(2,2)$ er globale maksimumspunkt og det indre punktet $(1, \frac{1}{2})$ er et globalt minimumspunkt.

Finn ekstremalverdiene til

(6) $f(x,y) = x \cdot y - y^2 - x$ på

trekanten



$\vec{\nabla} f = [y-1, \ x-2y]$

$\vec{\nabla} f = \vec{0}$ når $y=1$ og $x-2(1)=0, \ x=2$

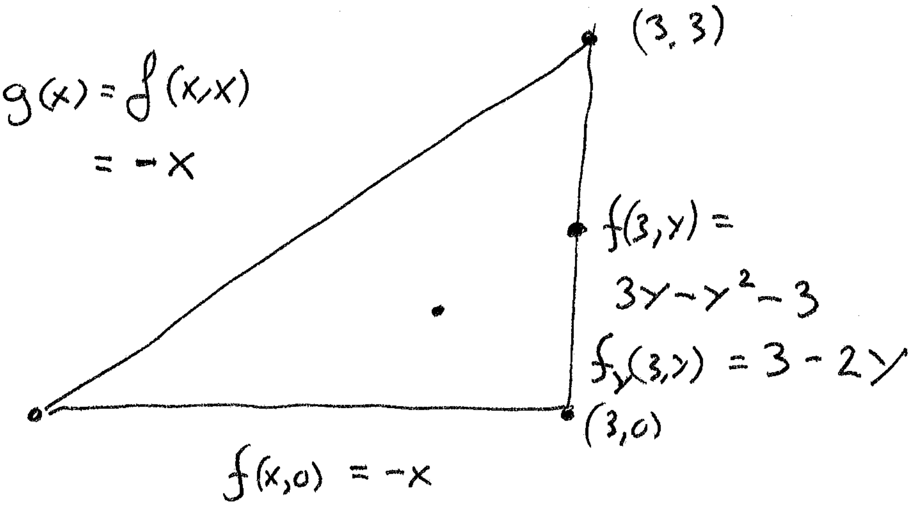
Er dette lok. maks/min eller sadelpunkt?

$f_{xx} = 0$, $f_{yy} = -2$, $f_{xy} = 1$

$$\Delta = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -1 < 0$$

så f har et sadelpunkt i $(2,1)$.

sjekker randen



Ekstremalverdisetningen gir eksistens av Maks og Min punkt.

Maks.punkt $(0,0)$

Minimumspunkt $(3,0)$ og $(3,3)$.

→

(7) På linjestykke hvor $x = 3$ så er $f(3, 3/2)$

$= \frac{3}{2}(3 - \frac{3}{2}) - 3 = \frac{9}{4} - 3 = \underline{-3/4}$ et lok. maksimums punkt. Det behøver ikke være det i D.

Visjekker f_x i $(3, 3/2)$:

$$f_x(3, 3/2) = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2} > 0$$

Så $f(x,y)$ avtar hvis vi går fra $(3, 3/2)$ mot det indre av D. Så vi har et lokalt maks punkt i $(3, 3/2)$ i D.

På de to andre linjestykkene (av randen) er det bare kritiske punkt i hjørnene (endepunktene)

Visjekker hjørnene:

$f(0.0) = 0$ $\qquad \vec{\nabla} f(0,0) = [-1, 0]$

så (0.0) er et lokalt maks. punkt

$f(3.0) = -3$ $\qquad \vec{\nabla} f(3,0) = [-1, 3]$

så $(3,0)$ er et lokalt min. punkt

$f(3.3) = -3$ $\qquad \vec{\nabla} f(3.3) = [2, -3]$

(3.3) lokalt min punkt.

men avtagende inne i D fra pt. (3.3).