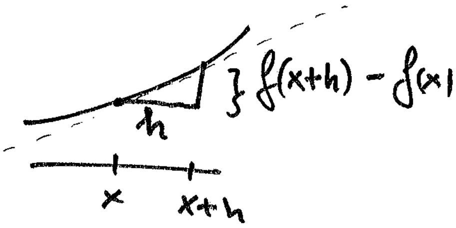
25.02.2014

Partiell deriverte 10.3

(1) Den deriverte $(x^2)' = \frac{d}{dx} x^2 = 2x$

$$\frac{d}{dx} f(x) = \lim_{h \to 0} \underbrace{\frac{f(x+h) - f(x)}{h}}_{\substack{\text{stigningstallet} \\ \text{til sekantlinjen}}}$$



Stigningstallet til tangentlinjen i $(x, f(x))$.

Derivasjon er lineær $\quad (a f(x) + b g(x))' = a f'(x) + b g'(x)$

produktregelen $\quad (f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$

Kjerneregelen $\quad f(u(x)) = f \circ u(x)$ sammensatt funksjon

$$\frac{d}{dx} f(u(x)) = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\left(\quad f(u(x))' = f'(u(x)) \cdot u'(x) \quad \right)$$

$$\frac{d}{dx}(ax^2 + bx + c) = a\frac{d}{dx}x^2 + b\frac{d}{dx}x + \frac{d}{dx}c$$

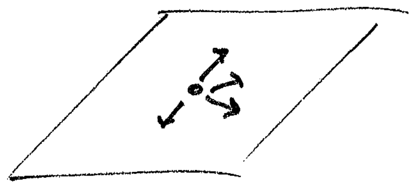
$$= \underline{2ax + b} \ (+0)$$

a, b, c parametre. De behandles som tall under derivasjon m.h.t x.

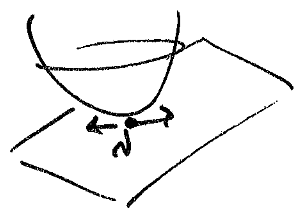
(2) To variabler $\quad f(x,y) = f(\vec{x})$

$$\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \frac{f(\vec{x}+\vec{h}) - f(\vec{x})}{|\vec{h}|}$$

Ubrukelig !



Det kreves samme stigningstall når vi nærmer oss $\vec{x}$ fra alle mulige retninger.



Bare definert når alle stigningstall er 0 !

Vi finner i stede de deriverte i hver av akse-retningene, og bruker disse til å finne de deriverte i alle andre retninger.

Den partiell deriverte til $f(x,y)$ med hensyn til x :

$$f_x(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}$$

og mht y :

$$f_y(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h}$$

Vi deriverer $f(x,y)$ m.h.t. x og behandler y som en fast parameter (tall) i den partiell deriverte m.h.t x.

Eksempler : $\quad f(x,y) = x\cdot y + \sin x$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y + \cos x \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x + 0 = x$$

③ $h(x,y) = y^4 - 3$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial h}{\partial y} = 4y^3$$

$$g(x,y) = e^{x^2+y} - \frac{x}{y} + \ln|y|$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 2x e^{x^2+y} - \frac{1}{y} + 0 = 2xe^{x^2+y} - \frac{1}{y}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = 1 \cdot e^{x^2+y} + \frac{x}{y^2} + \frac{1}{y} = e^{x^2+y} + \frac{x}{y^2} + \frac{1}{y}$$

Tilsvarende for funksjoner med mer en to variable

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \cdot x_2^3 \cdot x_3^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = x_2^3 \cdot x_3^2 \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2} = x_1(3x_2^2) \cdot x_3^2 = 3x_1 x_2^2 \cdot x_3^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = 2\, x_1 x_2^3 \cdot x_3$$

Finn de partiell deriverte til

$$f(x,y,z) = \sin(x \cdot z) + y - \sqrt{zy^2}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \sin(x \cdot z) = z \cdot \cos(x \cdot z)$$

$$\left(\sqrt{y^2} = \begin{cases} y & y \geq 0 \\ -y & y \leq 0 \end{cases} = |y| \right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 1 - \frac{d}{dy}\sqrt{z y^2} = 1 - \sqrt{z} \cdot \begin{cases} 1 & y > 0 \\ -1 & y < 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = x \cos(x \cdot z) - \frac{1}{2\sqrt{z}} |y|.$$

$$\left(\frac{d}{dy}\sqrt{y} = \frac{d}{dy} y^{1/2} = \frac{1}{2} y^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} y^{-1/2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{y^{1/2}} = \frac{1}{2\sqrt{y}} \right)$$

y isteden for z

④ Høyere ordens partielt deriverte.

De partiell deriverte $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ og $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ er funksjoner at to variable. Vi kan ta partiell deriverte av dem:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x} f\right) = f_{xx}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x} f\right) = f_{xy} = (f_x)_y$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y} f\right) = f_{yx} = (f_y)_x$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} f = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y} f\right) = f_{yy}.$$

Vi kan ta høyere deriverte:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x} f\right)\right)\right) = \frac{\partial^4}{\partial x \partial y^2 \partial x} f = f_{xyyx}$$

Eksempler: $f(x,y) = \frac{x}{y} \ (= x \cdot y^{-1})$

$$f_x = \frac{1}{y} \qquad f_y = \frac{-x}{y^2} \ (= x \cdot (-1 \cdot y^{-2}))$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{y}\right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}(-x \cdot y^{-2}) = -x \cdot (-2y^{-3}) = \frac{2x}{y^3}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{y}\right) = -1 \cdot y^{-2} = \frac{-1}{y^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-x}{y^2}\right) = \frac{-1}{y^2} \end{aligned}\right\} \text{like.}$$

(5) <u>Resultat</u> : De partiell deriverte $f_{xy}(\vec{p})$ og $f_{yx}(\vec{p})$ er like dersom begge eksisterer og er kontinuerlige i en åpen omegn om $\vec{p}$.

Eksempel

$$f(x,y,z) = x + yz - 2z + 3x^3 z$$

Finn f_{zz} f_{zx} f_{xzx} .

$$f_z = \frac{\partial f}{\partial z} = y - 2 + 3x^3$$

$$\underline{f_{zz}} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = \underline{0}$$

$$\underline{f_{zx}} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(y - 2 + 3x^3\right) = \underline{9x^2}$$

$f_{zx} = f_{xz}$ så $f_{xzx} = (f_{xz})_x = (f_{zx})_x$

$$= f_{zxx} = \frac{\partial}{\partial x}(9x^2) = \underline{18x}$$

Merdirekte : $f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = 1 + 9x^2 \cdot z$

$$f_{xz} = 9x^2$$

$$\underline{f_{xzx}} = \underline{18x}$$

⑥ Selv om $f(x,y)$ har partielt deriverte m.h.t x og y i et punkt $\vec{p}$ så trenger ikke $f(x,y)$ være kontinuerlig i punktet $\vec{p}$.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x \cdot y}{x+y} & x \neq -y \\ 0 & x = y \end{cases}$$

Fra tidligere har visett at $f(x,y)$ ikke er kontinuerlig i origo $(0,0)$.

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) \Big|_{(0,0)} = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h \cdot 0/h - 0}{h} = \underline{0}$$

Siden $f(x,y)$ er symmetrisk i x og y $(f(x,y) = f(y,x))$ er også $\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \underline{0}$