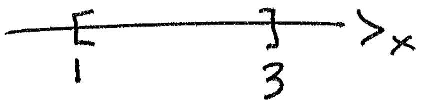
11.02.2014

10 Funksjoner av flere variabler

1

Reell funksjon $f : D \to \mathbb{R}$

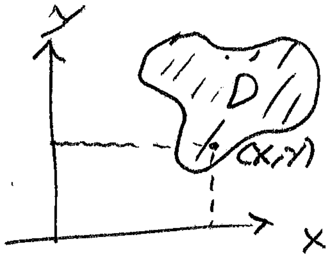
D kan være en delmengde av en linje



eks $f(x) = x^2$

$f(x) = \frac{\sin x}{x}$

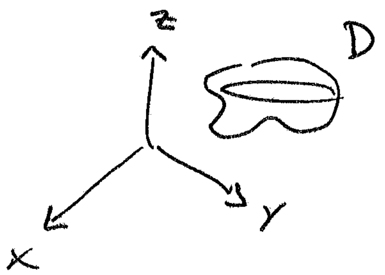
D kan være en delmengde av et plan



$f(x,y) = x^2 + y^2$

$f(x,y) = \frac{y\sin(x)}{x+y}$

D kan være en delmengde av et 3-rom



$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$

$f(x,y,z) = \frac{x - y + e^{zx}}{x^2 - \sin z}$

Vi kan og ha flere enn 3 variabler.

En funksjon er ofte gitt ved en formel/uttrykk

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$

$g(x,y) = \frac{x}{x^2 - y^2}$

Den naturlige def. mengden (til et uttrykk) er delmengden av (linjen/planet etc) hvor formelen gir mening (er definert)

2 Den nat. def mengden til $f(x)$ (ovenfor) er:

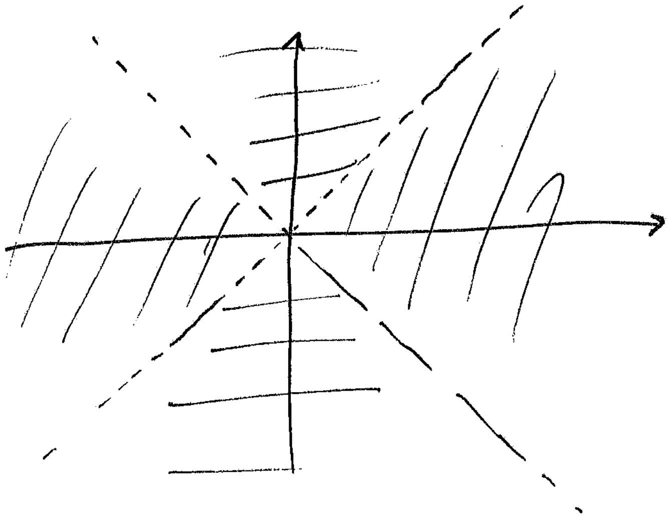
alle x s.a. $x > 1$, $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$, $\langle 1, \infty \rangle$

~~Den~~

Den nat. def. mengden til $g(x,y)$ er:

alle (x,y) slik at $x^2 \neq y^2$ (som er det samme som $|x| \neq |y|$)

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \neq |y|\}$



alt bortsett fra punktene på de stipla linjene $x = y$ og $x = -y$

$$h(x,y,z) = \sqrt{1-(x^2+y^2+z^2)}$$

Den nat. def. mengden til h er

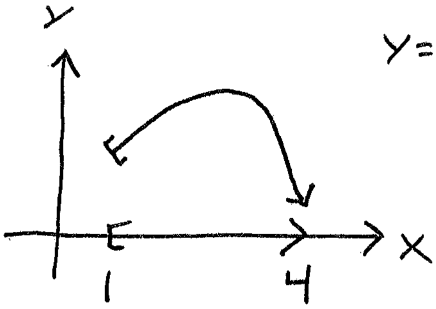
alle (x,y,z) s.a. $x^2+y^2+z^2 \leq 1$.

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$$

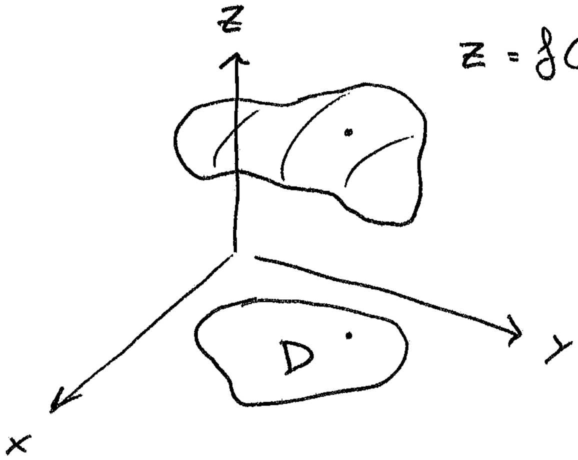
Dette er kulen med radius 1 og senter i origo.

(3) Grafen til en funksjon består av alle $(d, f(d))$ i $D \times \mathbb{R}$ for $d \in D$, definisjonsmengden.

$y = f(x)$

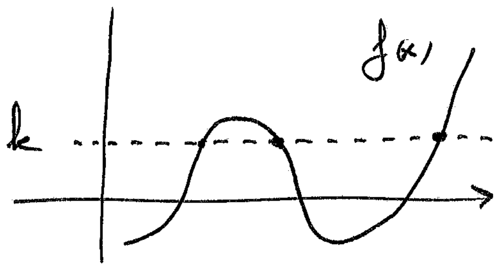


$z = f(x,y)$



Likninger $f(x) = k$

1 variabel



$k = 0$

$f(x) = 0$

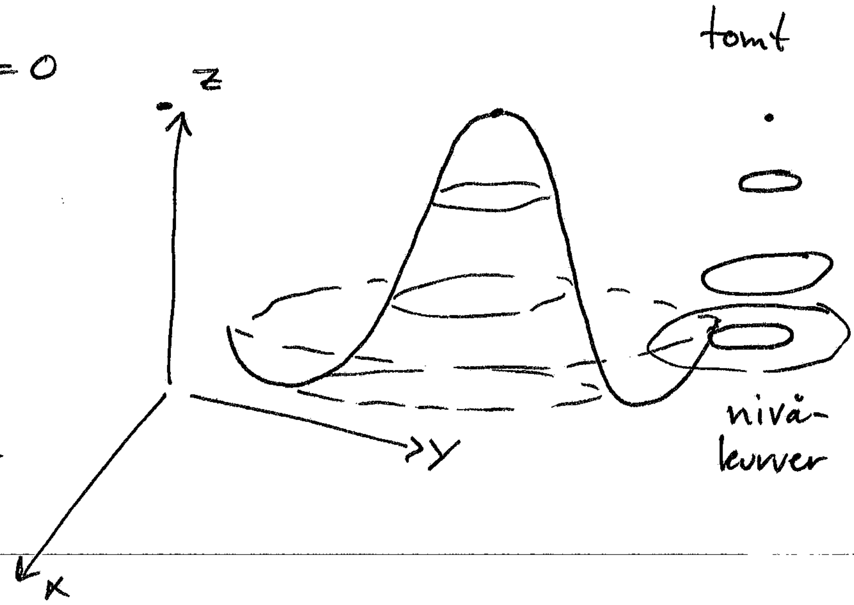
Løsningen er nullpunktene (typisk en endelig mengde)

$f(x) = k \iff f(x) - k = 0$

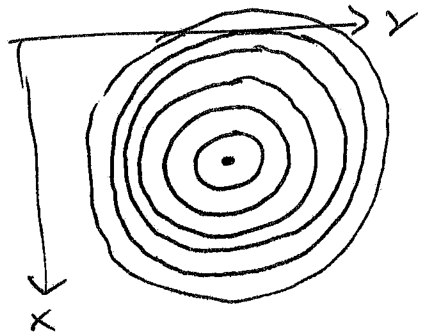
2 variabler

$f(x,y) = k$ løsningen består typisk av kurver (1 dim. objekt)

De kalles <u>nivåkurver</u>



Projeksjonen av nivåkurver, for ulike verdier av k, i planet gir en del informasjon om grafen til f



Nivåkurver til høydefunksjonen til et landskap benyttes i kart (topografi)

bratt skrent/stup

IR-termometer gir et bilde av en flate hvor temperaturen $T(x,y)$ er angitt ved ulike farger.

3 variabler $\quad f(x,y,z)$

$f(x,y,z) = k$ gir nivåflater (2-dim objekter)

$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$

$f(x,y,z) = 0$ nivåflaten er et punkt,

$f(x,y,z) = k$, $k<0$ løsningen er tom

$f(x,y,z) = k$

$k>0$ nivåflatene kuler med radius $\sqrt{k}$ og senter i origo.

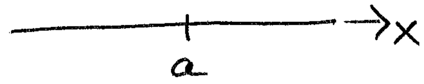
Mange variable $\quad f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(\vec{x})$

$\vec{x} = [x_1, x_2, \ldots x_n]$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \frac{x_1 \cdot x_2 - e^{-x_3 x_1}}{x_4 - x_5^2 + x_3^3}$$

5 10.2 Grenser og kontinuitet

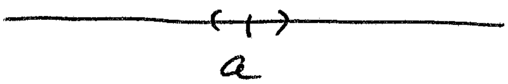
1 variabel $\lim_{x \to a} f(x) = L$ ← grensen til $f(x)$ når x går mot a.



to veier som fører til a : $\longrightarrow a$

elle $a \longleftarrow$

omegn om a



$\{x \in \mathbb{R} \mid |x-a| < \delta\}$

δ delta (gresk d)

$\delta > 0$

ϵ epsilon (gresk e)

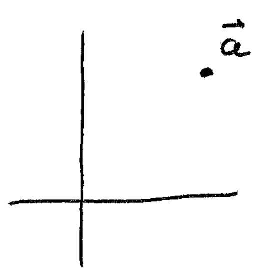
$\lim_{x \to a} f(x) = L$

For alle $\epsilon > 0$ kan vi finne en omegn D om a slik at $|f(x) - L| < \epsilon$ for alle x i D.

Det er tilstrekkelig å så på omegner på formen $\{x \in \mathbb{R} \mid |x-a| < \delta\}$.

Denne definisjonen er mest egna til å generalisere til funksjoner med flere variable.

2 variable



$\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} f(x) = L$

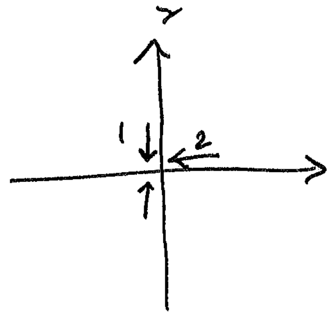
For alle $\epsilon > 0$, så finnes det en omegn D om $\vec{a}$,

$\{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid |\vec{x} - \vec{a}| < \delta\}$

slik at $|f(x) - L| < \epsilon$

for alle x i omegn D.

⑥ $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x+y}{x+y} = f(x,y)$$



"Langs x-aksen": $y=0$

$$f(x,0) = \frac{2x+0}{x+0} = 2 \quad (x \neq 0)$$

grensen "langs x-aksen" er derfor 2

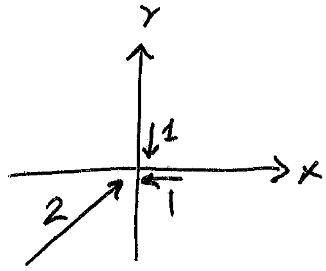
"Langs y-aksen": $x=0$

$$f(0,y) = \frac{0+y}{0+y} = 1 \quad (y \neq 0)$$

grensen langs y-aksen er derfor 1.

$\lim_{(x,y)\to\vec{0}} f(x,y)$ eksisterer ikke.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+2xy+y^2}{x^2+y^2}$$



grensen eksisterer og er lik 1 når vi nærmer oss $\vec{0}$ fra x- og y-aksene.

Nærmer oss $\vec{0}$ langs linjen $x=y$:

$$\lim_{x\to0} f(x,x) = \lim_{x\to0} \frac{x^2+2x\cdot x+x^2}{x^2+x^2}$$

$$= \lim_{x\to0} \frac{4x^2}{2x^2} = \lim_{x\to0} 2 = 2 \neq 1$$

Grensen eksisterer ikke

Definisjon:

$f(\vec{x})$ er kontinuerlig i $\vec{x} = \vec{a}$

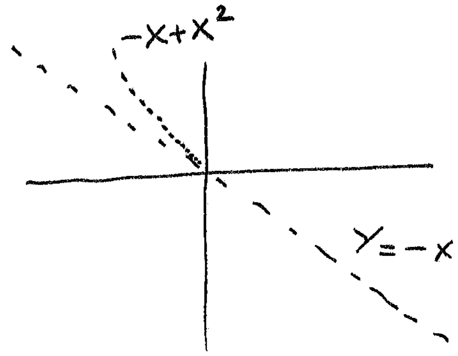
hvis $f(\vec{a}) = \lim_{\vec{x}\to\vec{a}} f(\vec{x})$

(7) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\cdot y}{x+y} = f(x,y)$$

$f(x,y) \equiv 0$ på aksene (bortsett fra origo)

prøver med linje $x=y$: grensen langs linjen er:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cdot x}{x+x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{2} = 0$$



(Vi får 0 når vi nærme oss $\vec{0}$ fra en vilkårlig rett linje)

$$y = -x + x^2$$

$$x\cdot y = -x^2 + x^3$$

$$x+y = x^2$$

$$f(x,-x+x^2) = \frac{-x^2+x^3}{x^2} = -1 + x$$

grensen langs kurven $y=-x+x^2$ er lik $\underline{-1}$

Så grensen $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\cdot y}{x+y}$ eksisterer ikke

Dere lurer kanskje på hvor funksjonen $y=-x+x^2$ kommer fra. Insikten er at denne grensen ville ikke eksistere for ved å nærme oss $\vec{0}$ slik at $x+y$ er omtrentlig $k\cdot x\cdot y$ for ulike k, får vi ingen grense $\frac{x\cdot y}{x+y}$ når $(x,y)\to\vec{0}$. Dette er mulig for endringer i x og y små i forhold til x og y gir lite utslag for $x\cdot y$, men kan gi stort utslag for $x+y$.