28.01.2014
Fauske

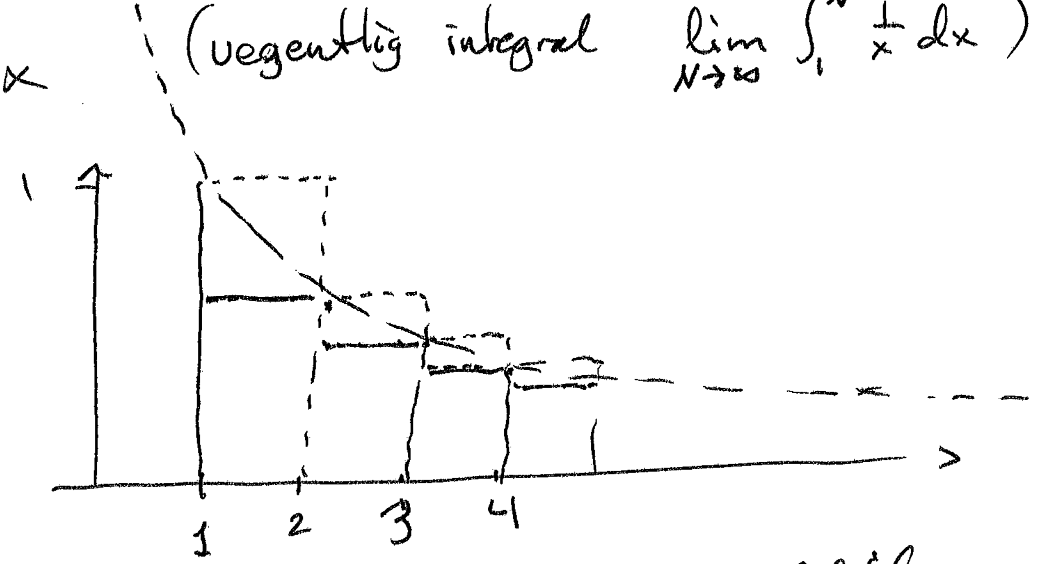
Konvergenstester 7.6 og 7.7

(1)

Harmonisk rekke $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$

Vi sammenlikner rekken med integralet

$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx$ (uegentlig integral $\lim_{N\to\infty} \int_1^N \frac{1}{x}\,dx$)



$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$ summen av de N første rektanglene (stipla)

$\underbrace{\text{av}}_{}$ arealet til

er større enn $\int_1^{N+1} \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| \Big|_1^{N+1} = \ln(N+1)$

$$S_N > \ln(N+1)$$

Siden $\lim_{N\to\infty} \ln(N+1) = \infty$ så må også

$\lim_{N\to\infty} S_N = \infty$.

Så den <u>harmoniske rekka divergerer</u> (mot ∞)

Vi finner nå øvre estimat for S_N

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = 1 + \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n} \leq 1 + \int_1^N \frac{1}{x}\,dx = 1 + \ln(N)$$

(2) $$\ln(N+1) \leq S_N \leq 1 + \ln(N)$$

$N = 10^6 - 1$ $\qquad$ $\ln(N+1) = \ln 10^6$

$= 6\cdot(\ln 10)$

$$6\cdot\ln(10) \leq S_N \leq 6\cdot\ln(10) + 1. \qquad \ln 10 \sim 2.302\ldots$$

Integraltesten $\qquad f(x) > 0$ avtagende funksjon

$$a_n = f(n)$$

$\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ konvergerer hvis og bare hvis

$\int_p^{\infty} f(x)\,dx$ konvergerer

Hvis rekken konvergerer og har en sum S

da $\int_{N+1}^{\infty} f(x)\,dx < S - S_N < \int_N^{\infty} f(x)\,dx$

---

p-rekker $\qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ $\qquad$ $p=1$ gir den harmoniske rekke

divergerer når $p \leq 1$

konvergerer når $p > 1$

$p \leq 0$ rekken vil opplagt divergere

$p > 0$ $\quad f(x) = \frac{1}{x^p}$ er en avtagende positiv funksjon for $x \geq 1$.

$$\int_1^N \frac{1}{x^p}\,dx = \int_1^N x^{-p}\,dx = \begin{cases} \left.\frac{x^{-p+1}}{-p+1} + C\right|_1^N \\ \left.\ln|x| + C\right|_1^N \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{1-p}\left(N^{1-p}-1\right) & p \neq 1 \\ \ln |N| & p = 1 \end{cases}$$

3

$$\lim_{N\to\infty} N^{1-p} = \infty \qquad 0 < p < 1$$

$$\lim_{N\to\infty} N^{1-p} = 0 \qquad p > 1$$

(for eksempel $p = 1.1$: $\lim_{N\to\infty} N^{-0.1} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\sqrt[10]{N}} = 0$)

Integraltesten gir at p-rekken konvergerer for $p > 1$ og divergerer for $p \leq 1$.

Avgjør om $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^3}$ konvergerer.

Funksjonen $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^3} > 0$ er avtagende $(x > 3)$

Benytter integraltesten

$$\int_3^N \frac{1}{x(\ln x)^3}\, dx \qquad \text{merk at } \frac{1}{x} = (\ln x)'$$

Anvender substitusjon med $u = \ln x$

$$\int_3^N u' \frac{1}{u^3}\, dx = \int_{u(3)}^{u(N)} \frac{1}{u^3}\, du = \int_{\ln 3}^{\ln N} u^{-3}\, du$$

$$= \frac{u^{-2}}{-2}\Big|_{\ln 3}^{\ln N} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(\ln 3)^2} - \frac{1}{(\ln N)^2}\right)$$

Så $\int_3^\infty \frac{1}{x(\ln x)^3}\, dx = \lim_{N\to\infty} \int_3^N \frac{1}{x(\ln x)^3}\, dx = \frac{1}{2(\ln 3)^2}$

og rekken $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^3}$ konvergerer

④ Alternerende rekker

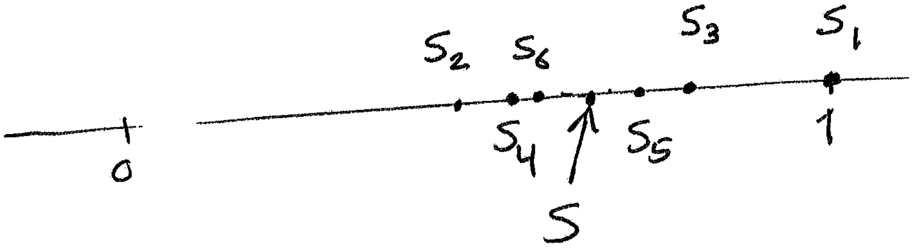
er rekker hvor leddene skifter fortegn når vi går til neste ledd.

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - + \cdots \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$$

Rekken $1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - - + +$ er ikke alternerende.

Så enten er $a_n = (-1)^n |a_n|$ eller så er $a_n = (-1)^{n+1} |a_n|$ i en alternerende rekke

Rekken $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ konvergerer



jevne delsummer øker
odde delsummer avtar

$$S_{2N} < S_{2M+1} \quad \text{alle } N \text{ og } M.$$

$$|S_{2N+1} - S_{2N}| = |a_{2N+1}| = \frac{1}{2N+1}$$

så $\lim_{N \to \infty} S_N$ konvergerer.

Generelt. En alternerende rekke $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ slik at $a_n \to 0$ når $n \to \infty$ og $|a_n|$ er avtagende ($|a_{n+1}| < |a_n|$) konvergerer

Hvis S er summen så er $|S - S_N| < |a_{N+1}|$

5. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$ konvergerer siden den er alternerende

$|a_n| = \frac{1}{\ln(n)}$ avtagende

og $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\ln(n)} = \frac{1}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 4} + \frac{1}{\ln 5} + \cdots$$

divergerer. $n > \ln n \quad (n \geq 3)$

$\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$ så N-te delsum til $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$,

$\sum_{n=3}^{N} \frac{1}{\ln n}$, er større enn $\sum_{n=3}^{N} \frac{1}{n}$

Siden $\lim_{N\to\infty} \sum_{n=3}^{N} \frac{1}{n} = \infty$ så er også $\lim_{N\to\infty} \sum_{n=3}^{N} \frac{1}{\ln n} = \infty$.

Hvis $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ konvergerer, så må $a_n \to 0$ når $n \to \infty$.

Dette er ikke tilstrekkelig som vi ser av eksemplene ovenfor.

p, q heltall. $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ konvergerer hvis og bare hvis $\sum_{n=q}^{\infty} a_n$ konvergerer

(differansen er en endelig sum)

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(10^{-9} + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$ divergerer siden $a_n \to 10^{-9}$ når $n \to \infty$

⑥ Sammenlikningstesten:

$\underline{0 \le a_n}$ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergerer

Hvis det finnes en c slik at $a_n \le c \cdot b_n$ (for n tilstrekkelig stor), da vil $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergere

Grenssammenlikningstesten.

Anta $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergerer.

Hvis $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ eksisterer, da vil også

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergere

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^3+n}{n^4+n^5}$$

$$a_n = \frac{2n^3+n}{n^4+n^5} \sim \frac{2n^3}{n^5} = \frac{2}{n^2} = b_n$$ når n er stor.

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}$ konvergerer (p-rekke med $p=2$)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^3+n}{n^4+n^5} \cdot \frac{n^2}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+n^{-2}}{1+n^{-1}} \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

Ved grensesammenlikningstesten må

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^3+n}{n^4+n^5}$ konvergere.

Konvergerer $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)+n}{n^2+n^2\sqrt{n}}$?

Vi sammenlikner med $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$

Dette er en p-rekke med $p=3/2$, så den konvergerer

$b_n = \frac{1}{n\sqrt{n}}$ $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ så rekken vår <u>konvergerer</u>