16.01.2013 Oppgave hjelp 7.1 og 7.2 Lorenzen...

(1)

Vi har full kontroll over grensen $x \to \infty$ av rasjonale uttrykk $\frac{p(x)}{q(x)}$

- Hvis grad $p(x)$ < grad $q(x)$, da er $\lim_{x\to\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = 0$

  "$q(x)$ vokser mye fortere enn $p(x)$".

- Hvis grad $p(x)$ = grad $q(x)$, da eksisterer grensen $\lim_{x\to\infty} \frac{p(x)}{q(x)}$ og grensen er forholdet mellom de ledende koeffisientene. ($a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots a_1 x + a_0$) $a_n \neq 0$, n er graden til polynomet
  ↑ ledende koeffisient

- Hvis grad $p(x)$ > grad $q(x)$, da divergerer $\frac{p(x)}{q(x)}$ når $x \to \infty$.

En god måte å synliggjøre (og føre) dette på vil være å dele med en passende potens av x i både teller og nevner. Potensen x^k hvor k er det minste av grad $p(x)$, grad $q(x)$ vil ha egenskapen at minst én av

$\frac{p(x)}{x^k}$ og $\frac{q(x)}{x^k}$ er et tall ulik 0 pluss ledd som går mot 0. Den andre kvotienten vil gå mot et tall ulik 0, eller mot vendelig.

Vi gir noen enkle eksempler for å illustrere dette:

(2)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3-2n}{n^5+3} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n^3-2n)/n^3}{(n^5+3)/n^3}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1-2/n^2}{n^2+3/n^3} \underline{\underline{=0}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2-1}{5n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n^2-1)/n^2}{(5n^2+1)/n^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2-1/n^2}{5+1/n^2} \overset{\text{grense setning}}{=} \frac{\lim_{n\to\infty}(2-\frac{1}{n^2})}{\lim_{n\to\infty}(5+\frac{1}{n^2})} = \underline{\underline{\frac{2}{5}}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^7}{n^5-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^7/n^5}{(n^5-1)/n^5}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{1-1/n^5}$$ <u>divergerer</u> (mot ∞)

L'Hopitals regel er klønete og tungvint å anvende på rasjonale uttrykk.

Hvis $\lim_{n\to\infty} f(n) = L$ og $\lim_{n\to\infty} g(n) = M$

da sier grensesetningene at

$$\lim_{n\to\infty} (f(n)+g(n)) = L+M$$

Hvis $\lim_{n\to\infty} f(n)$ konvergerer og $\lim_{n\to\infty} g(n)$ divergerer,

da vil $\lim_{n\to\infty} (f(n)+g(n))$ divergere.

(Hvis ikke ville $\lim_{n\to\infty} g(n) = \lim_{n\to\infty} ((f(n)+g(n)) - f(n))$ ha konvergert)

③ Hvis både $\lim_{n\to\infty} f(n)$ og $\lim_{n\to\infty} g(n)$ divergerer til ∞ eller $-\infty$, da er det en mulighet for at $\lim_{n\to\infty} (f(n) - g(n))$ konvergerer.

Eks $f(n) = n+1 \qquad g(n) = n$

$f(n) - g(n) = 1$ så

$$\lim_{n\to\infty} (f(n) - g(n)) = \lim_{n\to\infty} (1) = 1$$

I flere av oppgavene er det differansen av divergerende uttrykk som er rotfunksjoner. Her kan det være lurt å relatere differansen av rotuttrykkene til en differanse av potenser av disse. Dette kan gjøres ved bruk av (høyere) konjugatsetninger:

$(b+a)(b-a) = b^2 - a^2$ (gang ut!) gir $b-a = \dfrac{b^2-a^2}{b+a}$

$(b^2+ab+a^2)(b-a) = b^3 - a^3$ ... gir $b-a = \dfrac{b^3-a^3}{b^2+ab+a^2}$

Eks $$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1})^2 - (\sqrt{n})^2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$ når $n \to \infty$ er det klart at dette går mot 0.

Legg merke til at $\frac{\sqrt{n+\sqrt{n}}}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{n+\sqrt{n}}{n}}$

(4)

$$= \sqrt{1+\frac{\sqrt{n}}{n}}$$

$$= \sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}.$$

Geometrisk rekke

$$1+x+x^2+\cdots = \frac{1}{1-x} \qquad |x|<1$$

divergere $\quad |x|\geq 1.$

Vi kan lage mange variasjoner av denne

$$6x^3-12x^5+24x^7-+\cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 6\cdot 2^n x^{2n+3}$$

kan vi tenke på som

$$6x^3\left(1+(-2x^2)+(-2x^2)^2+(-2x^2)^3+\cdots\right)$$

$$= 6x^3\,\frac{1}{1-(-2x^2)} = \underline{\frac{6x^3}{1+2x^2}} \qquad \text{når } |-2x^2|<1$$

dvs. $\underline{|x|<\frac{1}{\sqrt{2}}}$

Sum og produkt av potensrekker

Utvider sum og produkt av polynomer.

$$\sum a_n x^n + \sum b_n x^n = \sum (a_n+b_n)x^n$$

$$\sum a_n x^n \cdot \sum b_m x^m = \sum_{n,m} a_n\cdot b_m\, x^{n+m}$$

$$= \sum c_k x^k$$

hvor $c_k = \sum_{\substack{n,m \\ n+m=k}} a_n b_m.$

(5) Potenser hvor både grunntallet og eksponenten er funksjoner er ofte nyttig å skrive om som en eksponentialfunksjon

Eks. $x^x = \left(e^{\ln x}\right)^x = e^{x \cdot \ln x}$

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{n \cdot \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$

Potens: a^n a er grunntallet, n er eksponenten

Noen grenser kan man finne ved å fortolke dem som definisjonen av en derivert, og så finne den deriverte i punktet. Alternativt kan man benytte L'Hopitals regel.

Eks $\lim\limits_{n\to\infty} n \ln\left(1-\frac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}{1/n}$

La $-\frac{1}{n} = k$ $n \to \infty$ svarer til $k \to 0^+$.

Så grensen er lik $\lim\limits_{k\to 0^+} \frac{\ln(1+k)}{-k}$

siden $\ln(1) = 0$ er dette lik $-\lim\limits_{k\to 0^+} \frac{\ln(1+k) - \ln(1)}{k}$

Dette er -1 gangет med den deriverte til $\ln(1+x)$ i $x=0$, som er $-1 \cdot \frac{1}{1+x}\Big|_{x=0} = \underline{\underline{-1}}$

Grensen $\lim\limits_{n\to\infty} n \ln\left(1-\frac{1}{n}\right) = -1$