LØSNINGSFORSLAG, Ma 2000 for bygg/maskin 20.02.2012

Oppg 1.a) $4y'' - 4y' - 3y = 0$. Kar. ligm $4r^2 - 4r - 3 = 0$

Røtter $r = \dfrac{4 \pm \sqrt{16 - 4\cdot 4(-3)}}{2\cdot 4} = \dfrac{4 \pm 8}{2\cdot 4} = \begin{cases} 3/2 \\ -1/2 \end{cases}$

Generell løsning $y = c_1 e^{\frac{3}{2}t} + c_2 e^{-\frac{1}{2}t}$

1b) Søker part. løsm. $y_p = At + B$, $y_p' = A$, $y_p'' = 0$

Innsatt
$$0 - 4\cdot A - 3(At + B) = 3t + 1$$
$$-4A - 3At - 3B = 3t + 1$$

$\Leftrightarrow \begin{array}{l} -3A = 3 \\ -4A - 3B = 1 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} A = -1 \\ -3B = 1 + 4A = -3 \end{array} \Leftrightarrow A = -1,\ B = 1$

Generell løsn. $y = y_h + y_p = c_1 e^{\frac{3}{2}t} + c_2 e^{-\frac{1}{2}t} + 1 - t$

1c) $my'' + ky = 0$

$5y'' + 20y = 0$, dvs $y'' + 4y = 0$

Kar. ligm. $r^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow r = \pm 2i$

Løsm. $e^{2it} = \cos 2t + i \sin 2t$

Realdel og im. del er løsm. $\Rightarrow$ gen. løsning

$$y = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t$$

$$\left.\begin{array}{l} y(0) = c_1 = 0 \\ y'(0) = 2c_2 \cos(2\cdot 0) = 6 \end{array}\right\} \Leftrightarrow c_1 = 0,\ c_2 = 3$$

Får $y(t) = 3 \sin 2t$

Oppg 2a) $a_n = \dfrac{2\cdot 3^{n+1}}{4^n} \Rightarrow \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{2\cdot 3^{n+2}}{4^{n+1}} \cdot \dfrac{4^n}{2\cdot 3^{n+1}} = \dfrac{3}{4}$

Rekka er geom fordi $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{3}{4}$ for alle n, dvs $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = k$ en konst.

Da $k = \frac{3}{4} < 1$ så er rekka konvergent

Rekkas sum $s = \frac{a_1}{1-k} = \frac{2 \cdot \frac{3^2}{4}}{1 - \frac{3}{4}} = 18$

2b) $\sum_{n=1} \frac{3^{n+1} + 2^{n-1}}{4^n} = \sum \left(\frac{3^{n+1}}{4^n} + \frac{2^{n-1}}{4^n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{4^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{4^n}$

De 2 rekkene til høyre er begge geometriske

(f. eks $\frac{2^n}{4^{n+1}} \cdot \frac{4^n}{2^{n-1}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ for alle n)

og begge er konvergente (med kvotient $\frac{3}{4}$ og $\frac{1}{2}$ hhv)

Derfor er den gitte rekka konvergent med sum

$$\frac{\frac{3^2}{4}}{1 - \frac{3}{4}} + \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{2}{4}} = 3^2 + \frac{1}{4-2} = 9 + \frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{19}{2}}}$$

2c) $\sum (-1)^{n-1} \frac{x^{4n}}{n}$. La $a_n = (-1)^{n-1} \frac{x^{4n}}{n}$

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{x^{4(n+1)}}{n+1} \cdot \frac{n}{x^{4n}} \right| = \frac{x^4}{n+1} \cdot n \xrightarrow[n \to \infty]{} x^4$$

Rekka konv. når $x^4 < 1$ og divergerer når $x^4 > 1$

Konvergens: $x^4 < 1 \Leftrightarrow x^2 < 1 \Leftrightarrow |x| < 1 \Leftrightarrow \underline{-1 < x < 1}$

Må undersøke endepunktene: $x = 1$ og $x = -1$ .. La

$x = \pm 1 \implies$ rekka er $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n}$, dvs konvergerer etter Leibnitz

Konv. området er : $\underline{\underline{-1 \leq x \leq 1}}$

Oppg 3a) Vet $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$

$$\implies 2\cos x = 2 - x^2 + \frac{2x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{2x^{2n}}{(2n)!} + \dots ; \; x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \quad 2\cos x - 2 + x^2 = \frac{2x^4}{4!} - \cdots \quad + (-1)^n \frac{2x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

$$\Rightarrow \quad g(x) = \frac{2\cos x - 2 + x^2}{x^4} = \frac{2}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{2x^{2n-4}}{(2n)!} + \cdots$$

$$\text{dvs} \quad g(x) = \underline{\underline{\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{2x^{2n-4}}{(2n)!}}} \quad , \quad x \in \mathbb{R}, \quad x \neq 0$$

Regningen viser at rekka konv. for alle x og at $g(x)$ er summen (eller mer nøyaktig $S(x) = \begin{cases} g(x), & x \neq 0 \\ \frac{2}{4!}, & x = 0 \end{cases}$ er summen)

3b) Vet $\quad g(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{g^{(m)}(0)}{m!} x^m = g(0) + \frac{g'(0)}{1!} x + \cdots$

Rekka for $g(x)$ er den samme som i (a), iallfall når $x \neq 0$

$$\Rightarrow \quad g(0) = \underline{\underline{\frac{2}{4!} = \frac{1}{12}}} \quad , \text{ eller mer nøyaktig } \underline{\underline{\lim_{x \to 0} g(x) = \frac{1}{12}}}$$

$$\frac{g^{(10)}(0)}{10!} = \text{"leddet foran } x^{10}\text{"} = -\frac{2}{14!} \quad \Rightarrow \quad g^{(10)}(0) = -\frac{2 \cdot 10!}{14!}$$

$$\text{dvs.} \quad \lim_{x \to 0} g^{(10)}(x) = \underline{\underline{-\frac{2 \cdot 10!}{14!}}} = -\frac{2}{11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14}$$

3c) Av a):

$$\int_0^1 g(x)\,dx = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{2x^{2n-3}}{(2n-3) \cdot (2n)!} \Bigg|_0^1 = \underline{\underline{\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{(2n-3)(2n)!}}}$$

$$\Rightarrow \quad \int_0^1 g(x)\,dx = \frac{2}{1 \cdot 4!} - \frac{2}{3 \cdot 6!} + \frac{2}{5 \cdot 8!} - \cdots$$

Rekka er alternerende! Feilen er $\leq$ 1. utelatte ledd

dvs feilen E i tilnærmingen

$$\int_0^1 g(x)\,dx = \frac{2}{1 \cdot 4!} - \frac{2}{3 \cdot 6!} + \frac{2}{5 \cdot 8!} \quad \text{oppfyller}$$

$$\underline{\underline{|E| \leq \frac{2}{7 \cdot 10!}}}$$

Oppg 4 $\quad z = 2x^2y^2 - 2y^2 - x^3 + 2x$

a) $z_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \underline{4xy^2 - 3x^2 + 2}$, $z_y = \underline{4x^2y - 4y}$

$z_{xx} = \underline{4y^2 - 6x}$, $z_{xy} = z_{yx} = \underline{8xy}$, $z_{yy} = \underline{4x^2 - 4}$

$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = \underline{-1}$ er stign. tallet til tangenten til C i (1,0)

der C = den kurven på flaten som ligger i vertikalplanet $y=0$

dvs C = kurven hvor flaten skjærer xz-planet

b) Brattest stigning i gradientens retning, dvs

$\nabla f(0,1) = [4xy^2 - 3x^2 + 2, 4x^2y - 4y]_{(x,y)=(0,1)} = \underline{[2,-4]}$

Stigningstallet i denne retningen: $|[2,-4]| = \sqrt{2^2+4^2} = \sqrt{20} = \underline{2\sqrt{5}}$

Vi må gå i en retning $[x,y]$ som står vinkelrett på $[2,-4]$, dvs. $[x,y]\cdot[2,-4] = 0$

$\Leftrightarrow \quad 2x - 4y = 0$. Her er $x=2, y=1$ en løsn.

$\Rightarrow \quad \vec{v} = \underline{[2,1]}$ eller $\underline{-[2,1]}$ er retningen hvor vi beveger oss i samme horisontale nivå.

c) Kritiske punkter:

$z_x = 4xy^2 - 3x^2 + 2 = 0$

$z_y = 4y(x^2-1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = 0, x = 1$ eller $x = -1$ er løsningen av den siste ligningen

$y = 0$ gir $-3x^2 + 2 = 0$

$x^2 = 2/3$

$x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}} \quad \Rightarrow \quad \underline{\left(\sqrt{\tfrac{2}{3}}, 0\right) \text{ og } \left(-\sqrt{\tfrac{2}{3}}, 0\right)}$

$x = 1$ gir $z_x = 4y^2 - 3 + 2 = 0 \iff 4y^2 = 1$, $y = \pm\frac{1}{2}$

$x = -1$ gir $z_x = -4y^2 - 3 + 2 = 0 \iff 4y^2 = -1$. Ingen løsn.

Totalt 4 kritiske punkter

$$\underline{\underline{\left(\sqrt{\tfrac{2}{3}}, 0\right)}}, \ \underline{\underline{\left(-\sqrt{\tfrac{2}{3}}, 0\right)}}, \ \underline{\underline{\left(1, \tfrac{1}{2}\right)}} \text{ og } \underline{\underline{\left(1, -\tfrac{1}{2}\right)}}$$

$\Delta = z_{xx} z_{yy} - z_{xy}^2 = (4y^2 - 6x)(4x^2 - 4) - (8xy)^2$

$\Delta\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, 0\right) = -6\sqrt{\frac{2}{3}}\left(4 \cdot \frac{2}{3} - 4\right) = 8 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} > 0$, $z_{xx} = -6\sqrt{\frac{2}{3}} < 0$

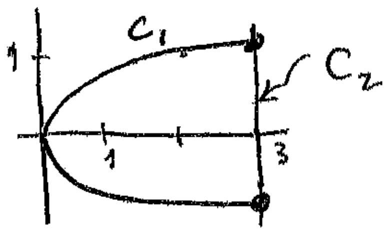
$\Rightarrow \left(\sqrt{\frac{2}{3}}, 0\right)$ er et $\underline{\underline{\text{max. pkt}}}$

$\Delta\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, 0\right) = -8\sqrt{\frac{2}{3}} < 0 \Rightarrow \underline{\underline{\left(-\sqrt{\tfrac{2}{3}}, 0\right) \text{ er et sadelpunkt}}}$

$\Delta\left(1, \frac{1}{2}\right) = -\left(8 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}\right)^2 = -16 < 0 \Rightarrow \underline{\underline{\left(1, \tfrac{1}{2}\right) \text{ er et sadelpunkt}}}$

$\Delta\left(1, -\frac{1}{2}\right) = -16 \Rightarrow \left(1, -\frac{1}{2}\right)$ er et sadelpunkt

d)



Fra c) Lokalt max i $\left(\sqrt{2/3}, 0\right)$ og

$f\left(\sqrt{2/3}, 0\right) = \underline{\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}}$

$\boxed{\text{Langs } C_1}$ er $x = 2y^2$. Innsatt:

$z = 2x^2y^2 - 2y^2 - x^3 + 2x = x^3 - x - x^3 + 2x = x$ ← Kaller den $h_1(x)$

$z = h_1(x) = x$ langs C_1 med def. område $0 \le x \le 3$ $\Big\}$ $h_1'(x) = 1 \Rightarrow h_1$ er strengt voksende i $[0, 3]$

Max/Min av z langs C_1 er derfor i endepunktene av $0 \le x \le 3$

$h_1(0) = 0$, $h_1(3) = 3$, dvs max for $x = 3$, $y = \pm\sqrt{\frac{x}{2}} = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$.

$\underline{\text{Max}}$ av z langs C_1 : $\underline{z_{max} = 3}$ i $\underline{\text{punktene}\left(3, \sqrt{\tfrac{3}{2}}\right) \text{ og } \left(3, -\sqrt{\tfrac{3}{2}}\right)}$

$\underline{\text{Min}}$ av z langs C_1 $\underline{z_{min} = 0}$ i $\underline{(x, y) = (0, 0)}$

$\boxed{\text{Langs } C_2}$: $x = 3$ innsatt $z = 18y^2 - 2y^2 - 27 + 6 = 16y^2 - 21$

Vil finne max/min av $z = h_2(y) = 16y^2 - 21$, $-\sqrt{\frac{3}{2}} \le y \le \sqrt{3/2}$

$h_2'(y) = 16 \cdot 2y = 0 \iff y = 0$. $z = h_2(0) = \underline{-21}$ i $(3, 0)$. Trenger ikke undersøke endepkt langs C_2 fordi de er de samme som for C_1. Totalt

[illegible] $z_{min} = -21$ i $(3, 0)$, $z_{max} = 3$ i $\left(3, \pm\sqrt{3/2}\right)$