Oppgave 1

a) Finn den generelle løsningen av differensiallikningen $4y'' - 4y' - 3y = 0\,.$

b) Finn den generelle løsningen av $4y'' - 4y' - 3y = 3t + 1\,.$

c) I enden av en fjær med fjærkonstant (Hookes konstant) $k = 20$ henger en liten metallkule med masse $m = 5$. Vi antar at vekten av fjæra er så liten at vi kan se bort fra den. Ved tiden $t = 0$ settes kule med fjær i bevegelse. La $y(t)$ være avstanden fra likevektsstillingen ved tiden t. Bestem $y(t)$ når $y(0) = 0$ og $y'(0) = 6$ idet vi antar at bevegelsen av fjær med kule er fri og udempet.

Oppgave 2

a) Undersøk om rekka $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 3^{n+1}}{4^n}$ konvergerer eller divergerer og finn summen hvis rekka er konvergent.

b) Vis at rekka $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1} + 2^{n-1}}{4^n}$ konvergerer og finn rekkas sum.

c) Finn konvergensområdet til rekka $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{4n}}{n}\,.$

Oppgave 3

a) La $g(x) = \frac{2\cos x - 2 + x^2}{x^4}$, $x \neq 0$. Bruk potensrekka til $\cos x$ til å finne Maclaurinrekka til $g(x)$. Ta med det generelle leddet. For hvilke x konvergerer rekka og hva er rekkas sum?

b) Bruk a) i denne oppgaven til å finne $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$ og $\lim\limits_{x \to 0} g^{(10)}(x)\,.$

c) Finn $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,dx$ og skriv svaret som summen av en konvergent rekke. Anslå feilen vi får (dvs. finn en øvre grense for tallverdien av feilen) ved å ta med 3 ledd i rekka.

Oppgave 4

Gitt funksjonen $z = f(x,y) = 2x^2y^2 - 2y^2 - x^3 + 2x\,.$

a) Bestem alle partielle deriverte av 1. og 2. orden til $z = f(x,y)$. Finn $\frac{\partial f}{\partial x}(1,0)$ og gi en geometrisk tolkning av svaret.

b) Vi befinner oss i punktet $Q = (0, 1, -2)$ og har tenkt å bevege oss langs den brattest mulige kurven C på flaten. I hvilken retning må vi gå og hva er stigningstall til tangenten til C i denne retningen? I hvilke retninger må vi gå for å bevege oss på samme horisontale nivå?

c) Finn de kritiske punktene til $z = f(x,y)$ og angi deres type.

d) Kurvene $2y^2 = x$ og $x = 3$ avgrenser et område D i xy-planet (randa er inkludert). Finn absolutt maksimum og minimum av funksjonen $f(x,y)$ når vi lar D være definisjonsområde for f.