Eksamen 3. des 2012, Ma 2000 Bygg og maskin.

OPPGAVE 1

a) Finn den generelle løsningen av differensiallikningen $y'' + 2y' + 17y = 0$.

b) I enden av en fjær med fjærkonstant $k = 85$ og dempningskonstant $c = 10$ henger en metallkule med masse $m = 5$. Ved tiden $t = 0$ settes kule med fjær i bevegelse. Vi antar at vekten av fjæra er så liten at vi kan se bort fra den og at bevegelsen av fjær med kule er fri. La $y(t)$ være kulas avstand fra likevektsstillingen ved tiden t. Bestem $y(t)$ når $y(0) = 2$ og $y'(0) = 6$. Skriv svaret $y(t)$ på formen $Ae^{\alpha t}\sin(\omega t + \varphi)$.

OPPGAVE 2

a) Undersøk om rekkene $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+6}{n^2+n+3}$ og $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+6}{n^{5/2}+2n}$ konvergerer eller divergerer?

b) Finn konvergensområdet til rekka $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(3n)!}$. Konvergerer denne rekka absolutt for alle x i konvergensområdet?

OPPGAVE 3

a) Bruk potensrekka til $\sin x$ til å finne Maclaurinrekka til $\frac{\sin x}{x}$. For hvilke x konvergerer rekka?

b) Deriver Maclaurinrekka til $\frac{\sin x}{x}$ ledd for ledd og finn summen av den rekka du da får. Vis at $\sin x - x\cos x = \frac{2x^3}{3!} - \frac{4x^5}{5!} + \frac{6x^7}{7!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{2n \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$.

c) Beregn integralet $\displaystyle\int_0^1 (\sin(x^2) - x^2\cos(x^2))\,dx$ som en sum av ei (uendelig) tallrekke. Bruk en av restleddsformlene til å anslå feilen som gjøres ved å bruke bare 2 ledd i tallrekka som en tilnærmet verdi for $\displaystyle\int_0^1 (\sin(x^2) - x^2\cos(x^2))\,dx$.

d) Konvergerer rekka $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sin\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\cos\frac{1}{n})$?

OPPGAVE 4

Gitt funksjonen $z = f(x,y) = xy^2 - x^2y - y^3 + 9y$. Grafen til f er en flate som vi kaller F.

a) Bestem alle partielle deriverte av første og andre orden til $z = f(x,y)$. Finn tangentplanets ligning i punktet $(1,1,8)$ på flaten F.

b) Regn ut den retningsderiverte til f i $(1,1)$ i retningen $\vec{v} = [2,1]$. Vertikalplanet $x - 2y + 1 = 0$ skjærer ut en kurve C på flaten F. Hva er stigningstall til tangenten til C i $(1,1,8)$?

c) Finn de kritiske punktene til $z = f(x,y)$ og klassifiser dem (dvs. angi deres type).

d) Trekanten med hjørner $(0,0)$, $(3,0)$ og $(3,3)$ avgrenser et område D i xy-planet (randa er inkludert). Finn absolutt maksimum og absolutt minimum av funksjonen $f(x,y)$ når vi lar D være definisjonsområde for f.

LØSNINGSFORSLAG

Oppg 1 a) $y'' + 2y' + 17y = 0$

Kar. ligm. $r^2 + 2r + 17 = 0$

$$r = -1 \pm \sqrt{1-17} = -1 \pm 4i$$

En løsning : $e^{(-1+4i)t} = e^{-t} \cdot e^{i4t} = e^{-t}\cos 4t + i e^{-t}\sin 4t$

Realdel og imaginærdel er løsninger.

Generell løsning

$$\underline{\underline{y = e^{-t}(c_1 \cos 4t + c_2 \sin 4t)}} \quad , \; c_1 \text{ og } c_2 \text{ reelle konstanter}$$

b) Vi får dette initialverdiproblemet

$$5y'' + 10y' + 85y = 0 \quad , \quad y(0) = 2 \; , \; y'(0) = 6$$

$$\Rightarrow \quad y'' + 2y' + 17y = 0$$

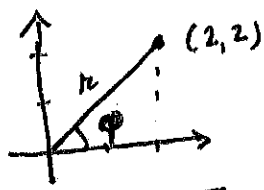
Generell løsning

$$y = e^{-t}(c_1 \cos 4t + c_2 \sin 4t)$$

$$y' = -e^{-t}(c_1 \cos 4t + c_2 \sin 4t) + e^{-t}(-4c_1 \sin 4t + 4c_2 \cos 4t)$$

Får
$$\begin{aligned} y(0) &= c_1 = 2 \\ y'(0) &= -c_1 + 4c_2 = 6 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} c_1 &= 2 \\ c_2 &= 2 \end{aligned}$$

Løsningen er $y = e^{-t}(2\cos 4t + 2\sin 4t)$



Kulas bevegelse er altså gitt ved

$$y = y(t) = \underline{\underline{2\sqrt{2}\, e^{-t} \sin(4t + \pi/4)}}$$

$r = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$

$\varphi = 45^\circ$ (dvs $\pi/4$)

gir

$2\cos x + 2\sin x = 2\sqrt{2}\sin(x + \pi/4)$

Oppg 2. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+6}{n^2+n+3}$. $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+6}{n^2+n+3} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+6/n^2}{1+\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}} = \underline{1}$

Rekka er divergent etter divergensteoremet

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+6}{n^{5/2}+2n}$, La $a_n = \frac{n+6}{n^{5/2}+2n}$ og $b_n = \frac{n}{n^{5/2}} = \frac{1}{n^{3/2}}$

Da $\sum b_n = \sum \frac{1}{n^{3/2}}$ er konvergent (p-rekke, $p=\frac{3}{2}$)

og $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$, så vil $\sum a_n$ konvergere etter grensesammenligningstesten

b) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(3n)!}$. La $a_n = (-1)^n \frac{x^{2n}}{(3n)!}$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{x^{2n+2}}{(3n+3)!} \cdot \frac{(3n)!}{x^{2n}}\right| = \frac{x^2}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)} \to 0$$

Rekka $\sum a_n$ vil derfor konvergere for alle x etter forholdstesten $\Rightarrow$ Konv. området blir <u>alle reelle tall</u>. Hvis vi bruker forholdstesten på rekka $\sum \left|\frac{x^{2n}}{(3n)!}\right| = \sum \frac{x^{2n}}{(3n)!}$ så vil svaret bli samme svar som for $\sum (-1)^n \frac{x^{2n}}{(3n)!}$ fordi vi i $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ allerede har tatt tallverdi. Derfor vil rekka konvergere absolutt for alle x i konvergensområdet.

Oppg. 3 a) mac. rekka til $\sin x$ er

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Rekka til $\frac{\sin x}{x}$ <u>konvergerer for alle</u> x fordi regningen bygger på ei rekke som konv. for alle x.

b) $\left(\frac{\sin x}{x}\right)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{2n\cdot x^{2n-1}}{(2n+1)!}$, $x\in\mathbb{R}$

Summen av denne rekka er:

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)' = \frac{x\cdot\cos x - \sin x}{x^2}$$

Hvis vi ganger med x^2 på begge sider av

$$\frac{x\cos x - \sin x}{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{2n\cdot x^{2n-1}}{(2n+1)!}$$

får vi: $x\cos x - \sin x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{2n\, x^{2n-1}\cdot x^2}{(2n+1)!}$

Ganger så med -1, dvs. skifter fortegn, og får

$$\sin x - x\cos x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n\cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{2x^3}{3!} - \frac{4x^5}{5!} + \frac{6x^7}{7!} - \cdots, \quad x\in\mathbb{R}$$

c) Erstatter x med x^2 og får

$$\sin(x^2) - x^2\cos(x^2) = \frac{2x^6}{3!} - \frac{4x^{10}}{5!} + \frac{6x^{14}}{7!} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{2n\, x^{4n+2}}{(2n+1)!} + \cdots$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \left(\sin(x^2) - x^2\cos(x^2)\right)dx = \left[\frac{2x^7}{3!\cdot 7} - \frac{4x^{11}}{5!\cdot 11} + \cdots (-1)^{n+1}\frac{2n\, x^{4n+3}}{(2n+1)!\,(4n+3)} + \cdots\right]_0^1$$

$$= \frac{2}{3!\cdot 7} - \frac{4}{5!\cdot 11} + \frac{6}{7!\cdot 15} - \cdots + (-1)^{n+1}\cdot\frac{2n}{(2n+1)!\cdot(4n+3)} + \cdots$$

Dette er ei alternerende rekke. Feilen ved tilnærmingen $\int_0^1(\sin x^2 - x^2\cos x^2)\,dx \approx \frac{2}{3!\cdot 7} - \frac{4}{5!\cdot 11}$ er derfor:

$$|\text{feilen}| \le \frac{6}{7!\cdot 15}$$

(Faktisk vil

$$s_2 \le \int_0^1(\sin x^2 - x^2\cos x^2)\,dx \le s_2 + \frac{6}{7!\cdot 15}$$

der $s_2 = \frac{2}{3!\cdot 7} - \frac{4}{5!\cdot 11}$).

d) Bruker grensesammenligning mot 1. ledd i Mac.rekka til $\sin x - x\cos x$, f.eks slik:

$$\sin\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\cos\frac{1}{n} = \frac{2}{3!}\left(\frac{1}{n}\right)^3 - \frac{4}{5!}\left(\frac{1}{n}\right)^5 + \cdots$$

$$= \frac{2}{3!\,n^3}\left(1 - \frac{3!}{2}\cdot\frac{4}{5!}\cdot\frac{1}{n^2} + \cdots\right) \Longrightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{\sin\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\cos\frac{1}{n}}{\frac{2}{3!\,n^3}} = 1$$ der

$a_n = \sin\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\cos\frac{1}{n}$ og $b_n = \frac{2}{3!\,n^3}$. Vet at $\sum b_n = \frac{2}{3!}\sum\frac{1}{n^3}$ er konvergent ($\frac{2}{3!}$ ganger ei p-rekke med $p=3$). $\Rightarrow$ $\sum a_n$ konvergerer etter grensesammenlign.test

Oppg. 4 $\qquad z = f(x,y) = xy^2 - x^2y - y^3 + 9y$

a) $\quad \underline{\underline{z_x = y^2 - 2xy}}$, $\underline{\underline{z_y = 2xy - x^2 - 3y^2 + 9}}$

$\underline{\underline{z_{xx} = -2y}}$, $\underline{\underline{z_{xy} = z_{yx} = 2y - 2x}}$, $\underline{\underline{z_{yy} = 2x - 6y}}$

$f(1,1) = 1-1-1+9 = 8 \Rightarrow (1,1,8)$ ligger på F

$z_x(1,1) = 1-2 = -1$, $z_y(1,1) = 2-1-3+9 = 7$

Tangentplanets lign. i $(1,1,8)$:

$$z - 8 = z_x(1,1)\cdot(x-1) + z_y(1,1)(y-1),$$ dvs

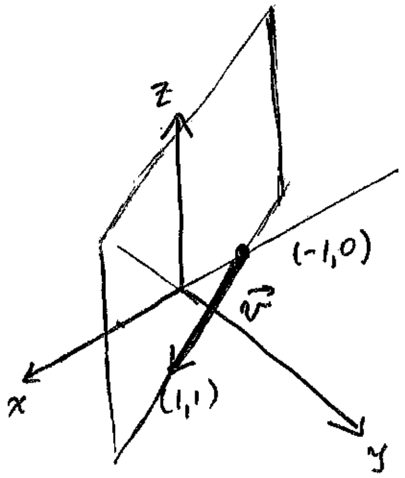
$$z = 8 - (x-1) + 7(y-1) = 8 - x + 1 + 7y - 7 \iff$$

$$\underline{\underline{z = -x + 7y + 2}}$$

b) Den retningsderiverte i retningen $\vec{v}$ er:

$$\nabla f(1,1)\cdot\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = [z_x(1,1), z_y(1,1)]\cdot\frac{[2,1]}{\sqrt{2^2+1^2}} = [-1,7]\cdot[2,1]/\sqrt{5}$$

$$= (-2+7)/\sqrt{5} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \underline{\underline{\sqrt{5}}}$$



Vertikalplanet $x-2y+1=0$ går gjennom $(1,1,0)$ og f.eks $(-1,0,0)$. Vektoren $\vec{v}$ på fig, betraktet som vektor i xy-planet, er

$$\vec{v} = [1,1]-[-1,0] = [2,1]$$

Vi har allerede regnet ut den retningsderiverte av f i $(1,1)$ i retning $\vec{v}$ $(=\sqrt{5})$. Av den geom. tolkningen av den retningsderiverte, så får vi at $\underline{\sqrt{5}}$ = stign. tallet til tangenten til kurven C på flaten som skjæres ut av dette vertikalplanet i $(1,1,f(1,1)) = (1,1,8)$.

c) Kritiske punkter:

$$z_x = y(y-2x) = 0 \iff y=0 \text{ eller } y=2x$$

$y=0$ innsatt i $z_y=0 \iff -x^2+9=0 \iff \underline{x=\pm 3}$

$y=2x$ innsatt i $z_y=0$ gir:

$$2x\cdot 2x - x^2 - 3\cdot 4x^2+9=0 \iff 9x^2=9 \iff x=\pm 1$$

$\underline{(\text{og } y=2x)}$

Får 4 kritiske punkter:

$$(x,y) = \underline{\underline{(3,0),\ (-3,0),\ (1,2) \text{ og } (-1,-2)}}$$

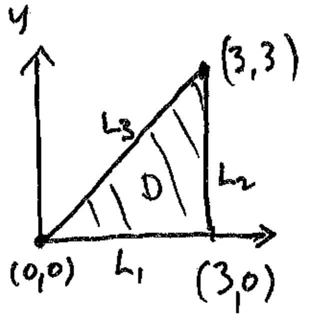
$$\Delta = z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 = -2y(2x\div 6y) - (2y-2x)^2 = \underline{4y(3y-x) - 4(y-x)^2}$$

$$\Delta(\pm 3,0) = -4(0\pm 3)^2 = \underline{-12<0} \implies \underline{\underline{(3,0) \text{ og } (-3,0) \text{ er sadelpkt}}}$$

$$\Delta(1,2) = 4\cdot 2\cdot 5 - 4 = 36>0,\ z_{xx}<0 \implies \underline{(1,2) \text{ er max.pkt}}$$

$$\Delta(-1,-2) = 4(-2)(-5)-4 = 36>0,\ z_{xx}>0 \implies \underline{\underline{(-1,-2) \text{ er min.pkt}}}$$

d)



Ingen kritiske punkter ligger i det indre av D. Funksjonen har abs. maks. og abs. min. etter ekstremumsverdisetningen.

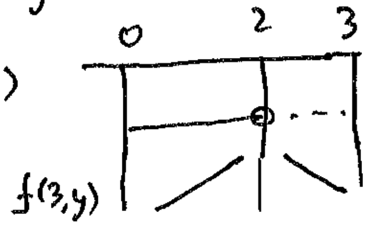
Abs. max/min må derfor ligge på randa.

L_1 $y=0$ innsatt gir $f(x,0) = 0$

L_2 $x=3$ gir innsatt i f:

$$f(3,y) = 3y^2 - 9y - y^3 + 9y = 3y^2 - y^3$$

$$\frac{d}{dy}(f(3,y)) = 3\cdot 2y - 3y^2 = 3y(2-y)$$



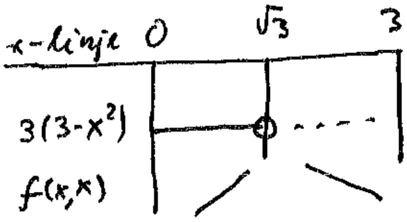
Fortegnsskjema viser:

$$f(3,y)_{max} = 3\cdot 2^2 - 2^3 = \underline{4} \quad \text{for } y=2$$

$$f(3,y)_{min} = \begin{cases} 0 & \text{for } y=0 \\ 0 & \text{for } y=3 \end{cases}$$

L_3 $y = x$ gir $f(x,x) = x^3 - x^3 - x^3 + 9x = -x^3 + 9x$

$$\frac{d}{dx}(f(x,x)) = -3x^2 + 9 = 3(3-x^2)$$



$$f(x,x)_{max} = -3\sqrt{3} + 9\sqrt{3} = \underline{6\sqrt{3}} \quad (\text{for } x=\sqrt{3})$$

$$f(x,x)_{min} = \begin{cases} 0 & \text{for } x=0 \\ 0 & \text{for } x=3 \end{cases}$$

2 kandidater til abs. max. "Den største vinner"

dvs $f(x,y)_{max} = \underline{\underline{6\sqrt{3}}}$ når $\underline{\underline{x=\sqrt{3}}}$

Uendelig mange kandidater til abs. min.

$f(x,y)_{min} = \underline{\underline{0}}$ når $\underline{\underline{(x,y) = (3,3)}}$ eller $\underline{\underline{(x,y) = (x,0)}}$
der $\underline{\underline{0 \le x \le 3}}$

(altså vil f.eks alle (x,y) på L_1 gi abs. min av f, med def. område D)