Eksamen i	BYPE2000 - Matematikk 2000
Dato:	2014
Målform:	Bokmål
Antall oppgaver:	7 (20 deloppgaver)
Antall sider:	4
Vedlegg:	Noen formler
Hjelpemiddel:	Ingen

Alle svarene skal grunngis. Alle deloppgavene teller like mye.

1

Avgjør om følgende rekker konvergerer. Finn summen til de rekkene som konvergerer.

a)

$$\sum_{n=0}^{\infty} 0.8^n$$

LF: Dette er en geometrisk rekke. Den konvergerer og summen er lik $1/(1-0.8) = 5$.

b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n(n+1)}$$

LF: Det $n$te leddet er lik

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

Vi får derfor at summen er lik $1/2$.

c)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$$

LF: Dette er lik Taylor rekken til $e^x - 1$ i $x = -1$. Summen er derfor lik $e^{-1} - 1 = (1-e)/e$.

2

Avgjør om følgende endelige og uendelige rekker konvergerer absolutt, betinget eller ingen av delene. Du trenger ikke finne summen selv om rekkene konvergerer.

a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\sqrt{n}}{n\sqrt[3]{n}}$$

LF: Dette er en alternerende rekke hvor absoluttverdien til det n-te leddet

$$n^{-1-1/3+1/2} = n^{-5/6}$$

er avtagende og går mot null når n går mot uendelig. Så rekken konverger. Siden p-rekken med $p = 5/6 < 1$ divergerer så er denne rekken betinget konvergent.

b)

$$\sum_{n=4}^{1000000} \frac{(-1)^n}{n}$$

LF: Dette er en endelig rekke og derfor konvergerer den absolutt.

c)

$$\sum_{n=5}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

LF: Forholdet mellom ledd $n+1$ og n er lik

$$\frac{(n+1)^2}{2(n+1)(2n+1)}$$

Grensen til dette forholdet når n går mot uendelig er lik $1/4$. Ved forholdstesten konvergerer rekken derfor absolutt.

3

a) Bestem Taylor rekkene om $x = 0$ til $f(x) = x^3/(1+x^2)$. Benytt Taylor rekkene til å finne den deriverte $f^{(13)}(0)$.

LF: Vi finner koeffisienten til x^{13} til å være lik -1 ved å sette inn $-x^2$ i den geometriske rekken og gange med x^3. Denne koeffisienten er lik $f^{(13)}(0)/13!$. Derfor er $f^{(13)}(0) = -13!$.

b) Bestem Taylor rekken om $x = 0$ til

$$\int_0^x \frac{\sin(t)}{t}\,dt$$

LF:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}$$

c) Gi et eksempel på en divergent alternerende rekke

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$$

($a_n > 0$ for alle n) hvor a_n går mot null når n går mot uendelig.

LF: Et slikt eksempel er rekken med $a_{2n} = 1/n$ og $a_{2n+1} = 1/2(n+1)$.

4

a) Bestem alle første og andre ordens deriverte til funksjonen

$$z = f(x, y) = -3x^2 + 6xy + 2y^3 - 3$$

med den naturlige definisjonsmengden.

LF:

$$f_x = -6x + 6y = 6(y - x)$$
$$f_y = 6x + 6y^2$$
$$f_{xx} = -6 \text{ og } f_{yy} = 12y$$
$$f_{xy} = 6$$

b) Bestem de kritiske punktene til f. Finn alle lokale maksimums og minimumspunkt til f.

LF: Funksjonen er kontinuerlig deriverbar i alle punkt i planet. De kritiske punktenene er derfor punkt hvor $f_x = f_y = 0$. Disse likningene er oppfylt presis når $x = y$ og $y + y^2 = 0$. De kritiske punktene er derfor $(0, 0)$ og $(-1, -1)$.

Diskriminanten til f er lik $-72y - 36$.

Ved andrederiverttesten har f et lokalt maksimumspunkt i $(-1, -1)$ siden diskriminanten er positiv og de andrederiverte er negative i punktet. Det lokale maksimumspunktet er $(-1, -1, -2)$.

I punktet $(0, 0)$ er diskriminanten lik -36 og vi har et sadelpunkt.

c) En flate S er gitt implisitt ved $z^2(1-z)+x^2+3y^2=0$. Vis at punktet P med koordinater $(1,1,2)$ ligger på grafen til både f og g.

Finn en normalvektor til flaten S i punktet P.

LF: Vi setter inn verdiene og sjekker at vi får 0: $2^2(-1)+1+3=0$

En normalvektor til flaten er gitt ved gradientvektoren til uttrykket $z^2(1-z)+x^2+3y^2$. Gradienten er lik $[2x, 6y, 2z-3z^2]$. I punktet P er derfor en normalvektor til flaten gitt ved $[2,6,-8]=2[1,3,-4]$.

d) En kurve er gitt ved å ta snittet av grafen til f og flaten S. Parametriser tangentlinjen til denne kurven i punktet P.

LF: En normalvektor til grafen til f gitt ved $[-6x+6y, 6x+6y^2, -1]$. I punktet P er derfor $[0,12,-1]$ en slik normalvektor. Tangentvektoren til snittet av de to flatene er normal til begge normalvektorene. Derfor er retningen gitt ved kryssproduktet deres.

$$[1,3,-4]\times[0,12,-1]=[45,1,12]$$

En parametrisering av linjen er derfor

$$x=1+45t \quad y=1+t \quad z=2+12t$$

5

a) Finn tangentplanet til

$$z=f(x,y)=2+xy-xe^{x+2y}$$

i punktet $(2,-1)$.

LF: Funksjonsverdien i punktet er $f(2,-1)=-2$. En normalvektor er gitt ved

$$[y-e^{x+2y}-xe^{x+2y}, x+2xe^{x+2y}, -1]$$

I punktet $(2,-1-2)$ er derfor $[-4,6,-1]$ en normalvektor. Tangentplanet er gitt ved $-4(x-2)+6(y+1)-(z+2)=0$ eller

$$-4x+6y-z+12=0$$

b) Bestem alle retningsvektorene slik at den retningsderiverte til

$$f(x,y)=xy-y^2$$

i punktet $(2,3)$ er lik 3.

LF: Gradienten i punktet $(2,3)$ er lik $[3,-4]$. En retningsvektor har lengde 1. Vi søker derfor vektorer $[a,b]$ slik at $a^2+b^2=1$ og den retningsderiverte av f langs $[a,b]$ er lik 3

$$[3,-4]\cdot[a,b] = 3a-4b = 3$$

Setter vi inn for $a = 1+4b/3$ i $a^2+b^2=1$ får vi

$$(1+4b/3)^2+b^2 = 1+25b^2/9+8b/3 = 1$$

Løsningene for b er $b=0$ og $b=-24/25$. retningsvektorene er derfor

$$[1,0] \quad \text{og} \quad [-7,24]/25$$

6

a) Regn ut determinanten til 4×4 matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

LF: Determinanten er lik -13.

b) Finn egenverdiene til matrisen

$$M = \begin{bmatrix} 3i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & 9i & 0 \end{bmatrix}$$

Diagonaliser matrisen M.

LF: Egenverdiene er $3i$, -3 og 3. Noen egenvektorer er henholdsvis $[1,0,0]$, $[0,i,3]$ og $[0,-i,3]$.

La

$$D = \begin{bmatrix} 3i & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

La

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & -i \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Da er

$$P^{-1} = \frac{1}{6i}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & i \\ 0 & -3 & i \end{bmatrix}$$

En diagonaliseringen er gitt ved $M = PDP^{-1}$.

7

a) Vis at 2 og -3 er egenverdier til matrisen

$$M = \begin{bmatrix} -1.2 & -2.4 \\ -2.4 & 0.2 \end{bmatrix}$$

og diagonaliser matrisen M.

LF: En egenvektor til 2 er $[3, -4]$ og en egenvektor til -3 er $[4, 3]$. La

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

og la

$$P = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

Inversmatirisen til P er

$$\frac{1}{25}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

En diagonalisering av M er PDP^{-1}

b) Bestem den generelle løsningen til likningssystemet

$$\begin{aligned} y_1' &= -1.2y_1 - 2.4y_2 \\ y_2' &= -2.4y_1 + 0.2y_2 \end{aligned}$$

LF: Fra a) så får vi at en generelle løsing er

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} k_1 e^{2t} \\ k_2 e^{-3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3k_1 e^{2t} + 4k_2 e^{-3t} \\ -4k_1 e^{2t} + 3k_2 e^{-3t} \end{bmatrix}$$

c) Finn løsningen til likningssystemet i b) som oppfyller initialbetingelsen $y_1(0) = 10$ og $y_1'(0) = 0$.

LF: Initialbetingelsen gir at $3k_1 + 4k_2 = 10$ og $6k_1 - 12k_2 = 0$. Derfor er $k_1 = 2k_2$ og $6k_2 + 4k_2 = 10k_2 = 10$. Parametrene er derfor $k_1 = 2$ og $k_2 = 1$.

$$y_1(t) = 6e^{2t} + 4e^{-3t} \quad \text{og} \quad y_2(t) = -8e^{2t} + 6e^{-3t}$$

Noen Taylor rekker

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad \ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{hvor} \quad 0! = 1 \text{ og } n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots n$$

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

Gradientenvektoren til $f(x,y)$ er $\nabla f = [f_x(x,y), f_y(x,y)]$.

Den retningsderiverte til $f(x,y)$ i retning $\mathbf{u}$ (hvor $|\mathbf{u}|$=1) er

$$D_{\mathbf{u}} f(x,y) = \nabla f(x,y) \bullet u$$

Likningen til tangentplanet til $z = f(x,y)$ i punktet $(a,b,f(a,b))$ er

$$z = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$$