Eksamen i	BYPE2000 - Matematikk 2000
Dato:	6. juni 2014
Målform:	Bokmål
Antall oppgaver:	7 (20 deloppgaver)
Antall sider:	4
Vedlegg:	Noen formler
Hjelpemiddel:	Ingen

Alle svarene skal grunngis. Alle deloppgavene teller like mye.

1

Avgjør om følgende rekker konvergerer. Finn summen til de rekkene som konvergerer.

a)

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n}$$

b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^{2n-1}}$$

c)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-1}{n!}$$

2

Avgjør om følgende rekker konvergerer absolutt, betinget eller ingen av delene. Du trenger ikke finne summen selv om rekkene konvergerer.

a)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n^2)}$$

b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\sin(\pi n/2)}{\pi n}$$

c)

$$\sum_{n=7}^{\infty} \frac{2n^3 - 3n + 2 + (-3n)^5}{\sqrt{n}(3n^4 - 6n^3 + 3n^6)}$$

3

a) Bestem Taylor rekkene om $x = 0$ til $\sin(x^2)$ og til $(e^{-x^3} - 1)/x^2$.

b) Bestem Taylor rekken om $x = 0$ til $f(x) = \int_0^x \sin(t^2)\, dt$. Vis at potensrekken er en alternerende rekke for alle positive x. Forklar hvorfor differansen mellom $f(x)$ og Taylor rekken, hvor du tar med leddene opp til og med grad 10, har absoluttverdi mindre enn $1/1320$, for alle x slik at $0 < x < 1$.

4

a) Bestem alle første og andre ordens deriverte til funksjonen

$$z = f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3x + 3y$$

med den naturlige definisjonsmengden.

b) Bestem tangentplanet til grafen til $f(x, y)$ i punktet $(1, 2)$. Regn ut den retningsderiverte til f i retning $\mathbf{u} = [0.6, 0.8]$ i punktet $(1, 2)$. I hvilke retning er den retningsderiverte til f i punktet $(1, 2)$ lik 0?

c) Bestem de kritiske punktene til f og finn ut hvilken type de er. Finn de globale maksimums- og minimumsverdiene til f, hvis de eksisterer.

d) Vi avgrenser nå definisjonsmengden til delmengden D av planet som består av alle (x, y) slik at $y \leq 0$ og $x \geq 0$. Finn alle lokale maksimumspunkt og minimumspunkt til f avgrenset til D.

5

a) BMI indeksen (Body-Mass-Index) er gitt som massen delt på kvadratet av høyden. BMI blir vanligvis uttrykt i enheten kg/m^2. Anta at massen måles med en relativ unøyaktighet på 0.3% og at høyden måles med en relativ unøyaktighet på 0.2%. Hva er den relative unøyaktigheten til BMI indeksen når høyden måles til 1.84 m og vekten til 84 kg. (BMI er da lik 24.81 kg/m^2.)

b) Avgjør om grensen

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|y-2x|}{2|x|+|y|}$$

eksisterer eller ikke. Bestem grensen hvis den eksisterer.

6

a) Regn ut determinanten til 3×3 matrisen

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 6 \\ -6 & 12 & 18 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

b) Kan matrisen

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

diagonaliseres (over komplekse tall)? Hvis ja, diagonaliser matrisen C.

7

a) Diagonaliser den symmetriske matrisen

$$M = \begin{bmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$$

Finn også en diagonalisering av matrisen $M/10$.

b) Regn ut potensen $(M/10)^7$. Avgjør om grensen $\lim_{n\to\infty}(M/10)^n$ eksisterer og finn grensen hvis den eksisterer.

c) Bestem den generelle løsningen til likningssystemet

$$\begin{aligned} y_1' &= 0.9y_1 - 0.2y_2 \\ y_2' &= -0.2y_1 + 0.6y_2 \end{aligned}$$

d) Finn løsningen til likningssystemet i c) som oppfyller initialbetingelsen $y_1(0) = 14$ og $y_2(0) = 3$.

Noen Taylor rekker

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad \ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{hvor} \quad 0! = 1 \text{ og } n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots n$$

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

Gradientenvektoren til $f(x,y)$ er $\nabla f = [f_x(x,y), f_y(x,y)]$.

Den retningsderiverte til $f(x,y)$ i retning $\mathbf{u}$ (hvor $|\mathbf{u}|$=1) er

$$D_{\mathbf{u}} f(x,y) = \nabla f(x,y) \bullet u$$

Likningen til tangentplanet til $z = f(x,y)$ i punktet $(a, b, f(a,b))$ er

$$z = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$$