Prøve i	BYPE2000 - Matematikk 2000
Dato:	6. mai 2014
Målform:	Bokmål
Antall oppgaver:	7 (20 deloppgaver)
Antall sider:	4
Vedlegg:	Noen formler
Hjelpemiddel:	Ingen

Alle svarene skal grunngis. Alle deloppgavene teller like mye.

(Formlene som er vedlagt er de samme som blir vedlagt på eksamen. Det blir også 20 deloppgaver på eksamen. For å bestå må man ha minst 40 % riktig.)

1

Avgjør om følgende rekker konvergerer. Finn summen til de rekkene som konvergerer.

a)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n - 3^{n-1}}{2^{2n}}$$

b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n+1}}$$

c)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(2n)!}$$

2

Avgjør om følgende rekker konvergerer absolutt, betinget eller ingen av delene. Du trenger ikke finne summen selv om rekkene konvergerer.

a)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln((n+3)^n)}$$

b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+3}\sqrt[3]{2n+2}\sqrt[4]{3n+1}}$$

c)

$$\sum_{n=7}^{\infty} \sin(1/n^2))$$

Hint:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

3

a) Bestem Taylor rekkene om $x = 0$ til $\ln(1 + x^3)$ og $1/(1 - x)^2$.

b) Finn den tiende deriverte i null, $f^{(10)}(0)$, til funksjonen

$$f(x) = \frac{\sin(x^2)}{1 - x}$$

4

a) Bestem alle første og andre ordens deriverte til funksjonen

$$z = f(x, y) = 3x^2 + y^3 + 6xy - 9y$$

med den naturlige definisjonsmengden.

b) Bestem tangentplanet til grafen til $f(x, y)$ i punktet $(-1, 1)$. I hvilke retning er den retningsderiverte til f i punktet $(1, -1)$ størst?

c) Bestem de kritiske punktene til f og finn ut hvilken type de er. Finn de lokale maksimums- og minimumsverdiene til f, hvis de eksisterer.

d) De kritiske punktene til f ligger alle på en linje. Beskriv denne linjen. Finn de kritiske punktene til f avgrenset til linjen og finn de lokale maksimums- og minimumsverdiene til f avgrenset til linjen.

5

a) Gitt en fuksjon $h(x,y,z) = x^2 - 3xy + y^3 + z^4$. Hva er funksjonsverdien i punktet P med koordinater $(-2,1,-1)$? Anta at relativ unøyaktighet til x, y og z alle er 1%. Hva er da relativ unøyaktighet til h i punktet P (til første orden)?

b) Avgjør om grensen

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 + x^2 - x^2y^2 - y^3 + y^2}{x^2 + y^2}$$

eksisterer eller ikke. Bestem grensen hvis den eksisterer.

6

a) Regn ut determinanten til 3×3 matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & c \\ 1 & -1 & a \\ 2a & 2c & c \end{bmatrix}$$

For hvilke a og c er 0 en egenverdi for matrisen? Beskrive gjerne løsningsmengden geometrisk.

b) En diagonal matrise D har diagonalelementer 3 og i. Bestem summen

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{D^{2m}}{(2m)!}$$

7

a) Finn egenverdiene til matrisen

$$M = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 13 & -2 \end{bmatrix}$$

Finn egenvektorer til matrisen som utspenner hele vektorrommet.

b) Finn en diagonalisering av matrisen M.

c) Bestem den generelle løsningen til likningssystemet

$$\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 - y_2 \\ y_2' &= 13y_1 - 2y_2 \end{aligned}$$

d) Finn løsningen til likningssystemet i c) som oppfyller initialbetingelsen $y_1(0) = 2$ og $y_1'(0) = 3$.

Noen Taylor rekker

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad \ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{hvor} \quad 0! = 1 \text{ og } n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots n$$

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

Gradientenvektoren til $f(x,y)$ er $\nabla f = [f_x(x,y), f_y(x,y)]$.

Den retningsderiverte til $f(x,y)$ i retning $\mathbf{u}$ (hvor $|\mathbf{u}|$=1) er

$$D_{\mathbf{u}} f(x,y) = \nabla f(x,y) \bullet u$$

Likningen til tangentplanet til $z = f(x,y)$ i punktet $(a,b,f(a,b))$ er

$$z = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$$