

Løsningsforslag til 3. obligatoriske oppgave i Diskret Matematikk

Høsten 2024

Oppgave 1.

a)

$$\binom{9}{3} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 3 \cdot 4 \cdot 7 = 84$$

b)

$\{1, 5, 9\}, \{1, 6, 8\}, \{2, 4, 9\}, \{2, 5, 8\}, \{2, 6, 7\}, \{3, 4, 8\}, \{3, 5, 7\}, \{4, 5, 6\}$

c)

$$a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = 2, a_4 = 3, a_5 = 4, a_6 = 3, a_7 = 2, a_8 = 3, a_9 = 2$$

d)

i)

4	3	8
9	5	1
2	7	6

Forklaring:

Tallet som skal stå i midten inngår i 4 summer. Siden $a_5 = 4$ må 5 stå i midten.

Tallene som skal stå i hjørnene er med i en rad, en kolonne og en diagonal og inngår derfor i 3 summer. Dermed er det kun 4 tall som er med i nøyaktig tre utvalg som kan stå i hjørnene. $a_2 = a_4 = a_6 = a_8 = 3$ og følgelig må tallene 2, 4, 6 og 8 stå i hjørnene.

Når et av disse tallene, for eksempel tallet 2, er plassert i det nedre venstre hjørnet, kan vi regne oss frem til at tallet som skal stå i det øvre høyre hjørnet må være 8. På samme måte kan vi avgjøre hvor de to siste «hjørnetallene» 4 og 6 må stå. Siden summene vertikalt og horisontalt også skal være lik 15 kan vi nå regne oss frem til hvor de resterende tallene 1, 3, 7 og 9 må stå. Disse inngår i 2 summer (rad og kolonne) som stemmer med at $a_1 = a_3 = a_7 = a_9 = 2$.

ii)

Antall mulige magiske kvadrat er $4 \cdot 2 = 8$

Forklaring:

I midten kan det bare stå ett tall, nemlig 5. I det første hjørnet vi plasser et tall har vi 4 muligheter, nemlig tallene 2, 4, 6 eller 8.

Når vi har valgt en av disse, er det gitt hva som må stå i det motstående hjørnet for at summen diagonalt skal bli 15. Etter at to hjørner har fått sine tall, har vi 2 tall igjen å velge mellom i det tredje hjørnet. Når valget er foretatt er det gitt hva som må stå i det siste hjørnet.

Når tallene i midten og i hjørnene er plassert er det gitt hvilke tall som må stå på sidene for at summene horisontalt og vertikalt skal bli 15.

Oppgave 2

a) $\binom{8}{2} = \frac{8 \cdot 7}{2 \cdot 1} = 4 \cdot 7 = 28$

$$\binom{8}{3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 8 \cdot 7 = 56$$

b)

Ingen 0'er: $\binom{8}{0} = 1$

En 0: $\binom{8}{1} = 8$

To 0'er: $\binom{8}{2} = 28$

Tre 0'er: $\binom{8}{3} = 56$

Færre 0'er enn 1'ere: $1 + 8 + 28 + 56 = \underline{\underline{93}}$

c)

Totalt er det 9 bokstaver hvorav det er 3 P'er, 2 S'er, 2 E'er, 1 U, og 1 O. Dermed blir svaret:

$$\frac{9!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = \underline{\underline{15120}}$$

d)

1 som første siffer: $1 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$

1 som andre siffer: $9 \cdot 1 \cdot 10 \cdot 10 = 900$

1 som tredje siffer: $9 \cdot 10 \cdot 1 \cdot 10 = 900$

1 som fjerde siffer: $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 1 = 900$

Til sammen brukes 1 som siffer $1000 + 900 + 900 + 900 = \underline{\underline{3700}}$ ganger

Tilsvarende resonnement viser at 3 også har blitt brukt som siffer 3700 ganger.

e)

i) Hvor mange permutasjoner har tallet 1 som første tall:

Det er kun tallene 2, 3 4 og 5 som kan velges: $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

ii) Hvor mange permutasjoner har tallet 1 som første tall og tallet 3 som midterste tall:

Det er kun tallene 2, 4 og 5 som kan velges: $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

iii) Vi kan bruke mengder til å løse problemet.

La **A** være mengden av alle permutasjoner som har **1 som første tall**.

La **B** være mengden av alle permutasjoner som har **3 som midterste tall**.

La **C** være mengden av alle permutasjoner som har **5 som siste tall**.

$A \cap B$ er mengden av permutasjoner som **har 1 som første tall og 3 som midterste tall**.

$A \cap C$ er mengden av permutasjoner som har **1 som første tall og 5 som siste tall**.

$B \cap C$ er mengden av permutasjoner som har **3 som midterste tall og 5 som siste tall**.

$A \cup B \cup C$ = Mengden av permutasjoner som **1 som første tall eller 3 som midterste tall eller 5 som siste tall**.

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

$$|A| = |B| = |C| = 4! = 24$$

$$|A \cap B| = |A \cap C| = |B \cap C| = 3! = 6$$

$$|A \cap B \cap C| = 2! = 2 \text{ fordi det her er kun 2 tall som kan velges.}$$

$$|A \cup B \cup C| = 24 + 24 + 24 - 6 - 6 - 6 + 2 = \underline{56}$$

Oppgave 3

a)

$$10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

b)

$$\frac{10!}{(10-6)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$$

c)

$$2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 48$$

d)

$$\binom{6}{2} \cdot \binom{30}{2} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 30 \cdot 29}{2! \cdot 2!} = 15 \cdot 15 \cdot 29$$

e)

$$\frac{10!}{3!2!2!1!1!1!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$$

Kan også skrives som

$$\binom{10}{3} \cdot \binom{7}{2} \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{2}{1}$$

Oppgave 4

a)

Karakteristisk polynom: $r^2 = 3r - 2$

Løser annengradslikningen for å finne røttene r_1 og r_2 :

$$r^2 - 3r + 2 = 0$$

$$r = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2}$$

$$r_1 = 2 \quad \text{og} \quad r_2 = 1$$

b)

Ved å sette $n=0$ og $n=1$ inn i den generelle løsningen

$$a_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$$

får vi ligningssettet:

1. $\alpha + \beta = 0$
2. $2\alpha + \beta = 1$

Trekker ligning nr.1 fra ligning nr. 2 og får $\alpha = 1$

Setter $\alpha = 1$ inn i ligning nr. 1 og får $\beta = -1$.

Setter α , r_1 og r_2 inn i den generelle løsningen

$$a_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$$

og får formelen for a_n :

$$a_n = 2^n - 1$$

c)

Bruker formelen til å finne a_2 :

$$a_2 = 2^2 - 1 = 4 - 1 = 3$$

Bruker rekursjonsligningen til å finne a_2 og ser at vi får samme svar:

$$a_2 = 3a_1 - 2a_0 = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 0 = 3 - 0 = 3$$

Bruker formelen til å finne a_3 :

$$a_3 = 2^3 - 1 = 8 - 1 = 7$$

Bruker rekursjonsligningen til å finne a_2 og ser at vi får samme svar:

$$a_2 = 3a_1 - 2a_0 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 1 = 9 - 2 = 7$$

Oppgave 5

a)

$$a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}, \quad n \geq 2, \quad a_0 = 2 \quad a_1 = 6$$

$$a_2 = 4 \cdot a_1 - 4 \cdot a_0 = 4 \cdot 6 - 4 \cdot 2 = 24 - 8 = \underline{16}$$

$$a_3 = 4a_2 - 4a_1 = 4 \cdot 16 - 4 \cdot 6 = 64 - 24 = \underline{40}$$

$$a_4 = 4a_3 - 4a_2 = 4 \cdot 40 - 4 \cdot 16 = 160 - 64 = \underline{96}$$

b)

Karakteristisk polynom: $r^2 = 4r - 4$
 $r^2 - 4r + 4 = 0 \quad r = \frac{4 \pm \sqrt{16-16}}{2} = 2 \quad \text{Dvs. kun én rot!}$

Generell løsning: $a_n = \alpha r^n + \beta n r^n$

$n=0$ gir $a_0 = \alpha$ dvs. $\alpha = 2$

$n=1$ gir $a_1 = 2\alpha + 2\beta = 6$
 $2 \cdot 2 + 2\beta = 6$
 $\beta = 1$

$$a_n = 2 \cdot 2^n + n 2^n$$

$$a_n = 2^n (2 + n)$$

c)

$$a_3 = 2^3 (2 + 3) = 8 \cdot 5 = \underline{40}$$

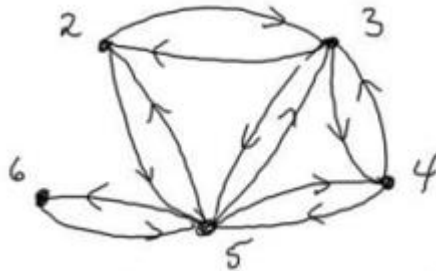
$$a_4 = 2^4 (2 + 4) = 16 \cdot 6 = \underline{96}$$

$$a_{10} = 2^{10} (2 + 10) = 1024 \cdot 12 = \underline{12288}$$

Oppgave 6

- a) $R = \{(2, 3), (2, 5), (3, 2), (3, 4), (3, 5), (4, 3), (4, 5), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 6), (6, 5)\}$

b)



c)

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

d)

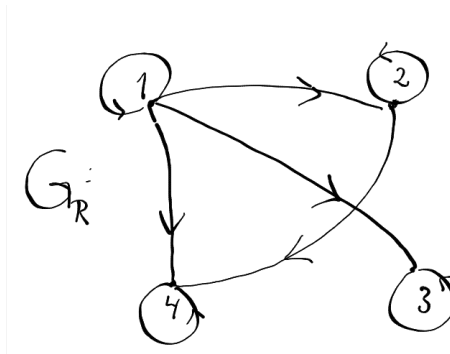
- **R er ikke reflektiv.**
 - Grafen: Ingen sløyfer i grafen,
 - Matrisen: alle elementene på hoveddiagonalen er 0.
- **R er symmetrisk.**
 - Grafen: Mellom alle relaterte punkter går pilene begge veier.
 - Matrisen er symmetrisk om hoveddiagonalen.
- **R er ikke antisymmetrisk**
R har elementer utenom hoveddiagonalen og er symmetrisk.
- **R er ikke transitiv.**
 $(2, 5) \in R$ og $(5, 6) \in R$ men $(2, 6) \notin R$

Oppgave 7

a)

$$R = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,4), (3,3), (4,4)\}$$

b)



$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

c)

- i) Relasjonen **R er refleksiv** fordi for alle $a \in A$ har vi $(a,a) \in R$. Dette betyr at alle tall går opp i seg selv.
Vi kan se det på grafen ved at alle punktene har sløyfer, og vi kan se det på matrisen ved at hoved-diagonalen inneholder kun 1'ere.
- ii) Relasjonen R er **ikke symmetrisk** fordi
hvis $(a,b) \in R$ og $a \neq b$ har vi at $(b, a) \notin R$.
Vi ser det på grafen ved at det ikke går piler i begge retninger mellom de relaterte punktene.
Vi ser det også på matrisen ved at den ikke er symmetrisk om hoved-diagonalen.
- iii) Relasjonen **R er antisymmetrisk** fordi for alle a og b i A gjelder hvis $(a,b) \in R$ og $a \neq b$ så $(b, a) \notin R$.
Dvs. Hvis a er faktor i b og a og b er forskjellige tall kan ikke b være faktor i a . (F.eks. hvis 2 er faktor i 4 så kan ikke 4 være faktor i 2.)
Vi ser det på grafen ved at det kun går piler i en retning mellom de relaterte punktene.
Vi ser det på matrisen ved at for alle 1'ere utenfor hoved-diagonalen står det 0 på den tilsvarende plassen speilet om hoved-diagonalen.

- iv) Relasjonen **R er transitiv** fordi
 hvis $(a,b) \in R$ og $(b,c) \in R$ så $(a,c) \in R$
 Bevis:
 Hvis a går opp i b kan b skrives som
 $b = a \cdot x$
 Hvis b går opp i c kan c skrives som
 $c = b \cdot y = a \cdot x \cdot y$.
 Vi ser at a er faktor i c og følgelig går a opp i c.

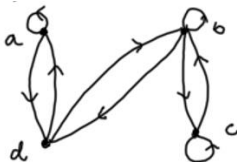
d)

- i) For at relasjonen R skal være en ekvivalensrelasjon må den være refleksiv, symmetrisk og transitiv. R er refleksiv og transitiv, men ikke symmetrisk. Følgelig er R ikke en ekvivalensrelasjon.
- ii) Siden relasjonen R er **refleksiv, antisymmetrisk og transitiv**, er **R en partiell ordning**.

Oppgave 8

- a) $R = \{(a, a), (a, d), (b, b), (b, c), (b, d), (c, b), (c, c), (d, a), (d, b)\}$

b)



- c) **R er ikke refleksiv** siden (d, d) mangler.

R er symmetrisk.

- Grafen: Mellom alle relaterte punkter går pilene begge veier.
- Matrisen er symmetrisk om hoveddiagonalen.

R er ikke antisymmetrisk

R har elementer utenom hoveddiagonalen og er symmetrisk.

R er ikke transitiv.

$$(a, d) \in R \text{ og } (d, b) \in R \text{ men } (a, b) \notin R$$

d)

$$M_R \circ M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Vi ser av matrise lengst til høyre at det kun er fra a til c og fra c til a det ikke går en vei med lengde 2.

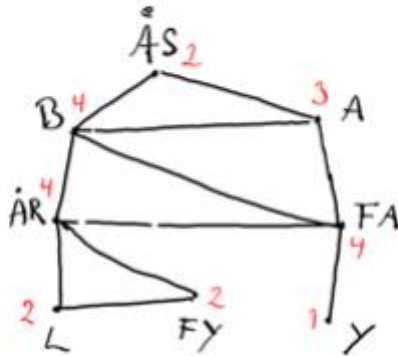
Oppgave 9

- a) $\text{grad}(A)=2$, $\text{grad}(B)=4$, $\text{grad}(C)=4$, $\text{grad}(D)=4$,
 $\text{grad}(E)=4$, $\text{grad}(F)=4$, $\text{grad}(G)=2$.
- b) Det finnes ingen åpen Euler-vei siden det ikke er
slik at nøyaktig to punkter har oddetallsgrad og resten
partallsgrad.
- c) Svaret er ja siden alle punktene har partallsgrad.
F.eks. er dette en vei: $A-B-F-G-E-C-D-F-E-D-B-C-A$.
- d) Hvis G fjernes, vil E og F få oddetallsgrad, mens resten
har partallsgrad. Da vil det finnes en åpen Euler-vei.

Oppgave 10

a) I grafen er det brukt følgende forkortelser for bydelnavnene:

Asane: ÅS, Arna: A, Bergenhus: B, Årstad: ÅR, Laksevåg: L,
Fyllingsdalen: FY, Fana: FA og Ytrebygda: Y



b) Ja det er mulig å besøke alle bydelene og krysse hver grense mellom dem kun én gang.

I følge Euler finnes det en åpen Euler-vei gjennom grafen der alle kantene passeres én og kun én gang, hvis nøyaktig 2 noder

(bydeler) er av odde grad. Dette er tilfellet her. (Y har grad 1 og A har grad 3). Hvis man starter turen i en av de to nodene (bydelene) av oddegrad, og slutter turen i den andre noden av oddegrad, kan man finne en åpen Euler-vei gjennom grafen, f.eks:

Y, FA, AR, FY, L, AR, B, FA, A, B, AS, A.

For at det skal finnes en lukket Euler-vei (der man starter og slutter turen på samme node(bydel)) må alle nodene (bydelene) være av par grad. Det er ikke tilfellet her. Følgelig finnes det ikke noen lukket Euler-vei gjennom grafen.