

Obligatorisk oppgave nr. 3 i Diskret matematikk

Høsten 2024

Oppgaven er frivillig og **skal ikke leveres**. Alle deloppgavene er hentet fra den siste tredjedelen av pensum og bør løses av alle som har ambisjoner om å bestå eksamen. Løsningsforslaget vil bli lagt ut i uken før eksamen.

Lykke til!

Oppgave 1

Gitt mengden $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

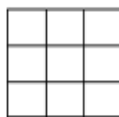
- a) Hvor mange uordnede utvalg (uten tilbake-legging) på tre tall kan vi velge fra A ?
- b) Det finnes til sammen åtte utvalg av typen fra punkt a) der summen av tallene i utvalget er 15. Et eksempel på et slikt utvalg er $\{1, 5, 9\}$.

Bestem de 7 resterende utvalgene med denne egenskapen. (Hint: Finn først alle utvalgene der 1 inngår, finn så alle utvalgene der 2 inngår, men ikke 1, deretter alle utvalgene der 3 inngår, men ikke 1 og 2, osv.)

- c) La så n være et tall fra A og la a_n være antall utvalg med sum lik 15 der n inngår. (Eks: Hvis tallet 1 er med i kun to av utvalgene der summen av tallene er 15 så er $a_1 = 2$.)

Bestem a_n for alle $n \in A$.

- d) De ni tallene i A skal plasseres i hver sin rute i et 3x3-kvadrat tilsvarende kvadratet du ser på figuren:



Hvis tallene plasseres slik at summen av tallene horisontalt, vertikalt og langs begge diagonalene er 15, kalles kvadratet for et «magisk kvadrat».

- i) Plasser de ni tallene i kvadratet over slik at du får et magisk kvadrat. (Hint: Tallene i de forskjellige rutene vil inngå i ulikt antall summer. Tallet i midten vil for eksempel inngå i fire summer. Hvilket tall må følgelig stå der?)
- ii) Hvor mange forskjellige magiske 3x3-kvadrater er det?

Oppgave 2

- a) Finn binomialkoeffisientene $\binom{8}{2}$ og $\binom{8}{3}$.
- b) Hvor mange bitsekvenser på 8 biter har færre 0-biter enn 1-biter?
- c) Hvor mange måter kan ordet SUPPEPOSE stokkes om?
- d) Anta at samtlige firesifrede heltall (tallene fra og med 1000 til og med 9999) er skrevet opp. Hvor mange ganger har da sifferet 1 blitt skrevet opp? Hvor mange ganger har sifferet 3 blitt skrevet opp?
- e) Gitt tallene 1, 2, 3, 4, 5.
- i) Hvor mange permutasjoner har tallet 1 som første tall?
 - ii) Hvor mange permutasjoner har tallet 1 som første tall og tallet 3 i midten?
 - iii) Hvor mange permutasjoner har 1 som første tall eller tallet 3 i midten eller tallet 5 bakerst?

Oppgave 3

Der hvor tallene blir store kan svarene angis som et produkt av faktorer.

- a) 10 barn fra et idrettslag skal fraktes til en turnering i en minibuss med 10 passasjer seter. På hvor mange ulike måter kan barna plasseres i minibussen?
- b) På avreisedagen er det 4 barn som melder avbud. På hvor mange måter kan de 6 resterende barna plasseres i bussen?
- c) 4 trenerne skal kjøre en egen personbil med 5 seter. Det er kun to som har førerkort og disse to skal bytte på kjøringen. På hvor mange måter kan trenerne plasseres i bilen?
- d) Idrettslaget har totalt 30 utøvere og 6 trenere. Det skal velges et styre bestående av 2 trenere og 2 utøvere. På hvor mange måter kan styre velges forutsatt at alle utøvere og trenere stiller til valg?
- e) På hvor mange måter kan bokstavene i ordet KARAOKEBAR stokkes om?

Oppgave 4

Gitt differensligningen $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$, der $a_0 = 0$ og $a_1 = 1$.

- a) Bestem ligningens karakteristiske polynom, og finn røttene r_1 og r_2 .
- b) Den generelle løsningen er gitt ved $a_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$.
Hvilket ligningssett må løses for å finne α og β ?
Finn α og β og bruk dem til å bestemme formelen for a_n .
- c) Regn ut a_2 og a_3 ved hjelp av
- i) formelen for a_n
 - ii) differensligningen

Sjekk at du får samme svar.

Oppgave 5

Gitt differensligningen $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$, $n > 1$, $a_0 = 2$, $a_1 = 6$.

- a) Finn a_2 , a_3 og a_4 .
- b) Finn en formel for a_n .
- c) Finn a_{10} ved å sette inn i formelen for a_n .

Oppgave 6

Gitt $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ og relasjonen R på A slik at $R = \{(a, b) \mid a \in A, b \in A, \gcd(a, b) = 1\}$.
Når $\gcd(a, b) = 1$ er a og b innbyrdes primiske.

- a) Sett opp R som en mengde av tallpar.
- b) Tegn grafen til R .
- c) Finn matrisen til R .
- d) Er R
 - i) refleksiv?
 - ii) symmetrisk?
 - iii) transitiv?

Alle svarene må begrunnes.

Oppgave 7

La $A = \{1, 2, 3, 4\}$ og la R være relasjonen på A gitt ved $R = \{(a, b) \mid a \text{ går opp i } b\}$.
(At « a går opp i b » betyr også at a er faktor i b .)

- a) Skriv opp R som en mengde av konkrete tallpar.
- b) Tegn grafen til G_R til relasjonen R .
- c) Sett opp matrisen M_R til relasjonen R .

d) Avgjør om R er

- i) refleksiv
- ii) symmetrisk
- iii) antisymmetrisk
- iv) transitiv

e) Er relasjonen R

- i) en ekvivalensrelasjon?
- ii) en partiell ordning (delvis ordning)?

Alle svarene under punkt d) og e) må begrunnes!

Oppgave 8

Matrisen M_R nedenfor er matrisen til en relasjon R på mengden $A = \{a, b, c, d\}$.

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- a) Sett opp R som en mengde av par av elementer fra A .
- b) Tegn grafen G_R til R .
- c) Er R refleksiv? Er R symmetrisk? Er R antisymmetrisk? Er R transitiv?
- d) Sett opp de parene (x, y) av elementer fra A som er slik at det i grafen G_R **ikke** går en vei med lengde 2 fra det første elementet til det andre.

Oppgave 9

Nedenfor ser du et kart over bydelene i Bergen kommune.



a) Tegn opp en graf som viser hvilke bydeler som grenser til hverandre. La hvert punkt representere en bydel og la kantene representere naborelasjoner dvs. grensene mellom bydelene. (NB! Fyllingsdalen grenser ikke til Fana og Laksevåg grenser ikke til Bergenhus.) Bruk gjerne bokstavforkortelser for bydelsnavnene.

b) Er det mulig å finne en reiserute gjennom bydelene der alle grensene mellom bydelene krysses én og bare én gang? Med andre ord; finnes det en åpen eller lukket *Euler-vei* gjennom grafen?

I begrunnelsen for svaret skal du gjøre rede for de betingelser som, ifølge *Leonhard Euler*, må være oppfylt for at det skal finnes en lukket eller åpen Euler-vei gjennom en graf.

Vedlegg

Logiske operatorer:

$\neg$ (ikke), $\wedge$ (og), $\vee$ (eller), $\oplus$ (eksklusiv eller), $\rightarrow$ (implikasjon)

Noen ekvivalenser fra utsagnslogikk:

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r) \qquad p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

$$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q \qquad \neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$

$$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q \qquad p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$$

$$\neg \exists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x) \qquad \neg \forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$$

Noen mengdeidentiteter:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

Kardinalitet – antallet elementer i en union:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Funksjoner:

I funksjonen $f: A \rightarrow B$ betyr A definisjonsmengde og B verdiområde. En funksjon $f: A \rightarrow B$ er en-til-en hvis $a_1, a_2 \in A$ og $a_1 \neq a_2$, medfører at $f(a_1) \neq f(a_2)$. En funksjon $f: A \rightarrow B$ er på hvis $\forall (b \in B) \exists (a \in A)$ slik at $f(a) = b$.

Matriser

Den transponerte til en matrise A betegnes med A^T og er den matrisen vi får når radene og kolonnene i A byttes om. Første rad i A blir første kolonne i A^T , andre rad i A blir andre kolonne i A^T , osv. Det betyr spesielt at hvis A er en $m \times n$ -matrise, så blir A^T en $n \times m$ -matrise.

Heltallsdivisjon (divisjonsalgoritmen), div og mod:

La a være et heltall og d et positivt heltall. Da finnes entydige heltall q og r med $0 \leq r < d$ slik at $a = dq + r$. Operasjonene **div** og **mod** defineres ved at $a \text{ div } d = q$ og $a \text{ mod } d = r$.

Største felles divisor

Største felles divisor (greatest common divisor – gcd) for to hele tall som ikke begge er 0, er det største heltallet som går opp i begge tallene.

Minste felles multiplum

Minste felles multiplum (least common multiple – lcm) for to positive heltall er det minste positive heltallet som begge går opp i.

Formel gcd(a,b) og lcm(a,b): Hvis $\text{gcd}(a,b)$ er største felles divisor for a og b og $\text{lcm}(a,b)$ er minste felles multiplum for a og b , så er $ab = \text{gcd}(a,b) \cdot \text{lcm}(a,b)$

Moduloregning:

La m være et positivt heltall. To heltall a og b kalles kongruente modulo m hvis m går opp i $a - b$ og det betegnes med $a \equiv b \pmod{m}$.

1) $a \equiv b \pmod{m}$ hvis og bare hvis $a \text{ mod } m = b \text{ mod } m$

2) $a \equiv b \pmod{m}$ og $c \equiv d \pmod{m}$, så er $a + c \equiv b + d \pmod{m}$ og $ac \equiv bd \pmod{m}$.

Tverrsum

La a være et positivt heltall. Tverrsummen til a er kongruent med a modulo 9.

Summen av rekker:

Geometrisk rekke: $\sum_{k=0}^n ar^k = a \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}, r \neq 1$

Aritmetisk rekke: La a være første ledd, b siste ledd og d differensen mellom to og to ledd. Antall ledd n er gitt ved $n = \frac{b-a}{d} + 1$ og summen er lik $\frac{(a+b)n}{2}$

Binomialkoeffisienter:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n(n-1) \cdots (n-r+1)}{r!}, \quad \binom{n}{0} = 1, \quad \binom{n}{1} = n, \quad \binom{n}{n} = 1,$$

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}, \quad \binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}$$

Binomialteoremet:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

Antall forskjellige utvalg på r stykker fra en samling på n stykker:

Ordnet uten tilbakelegging: $n(n-1) \cdots (n-r+1)$

Uordnet uten tilbakelegging: $\binom{n}{r}$

Ordnet med tilbakelegging: n^r

Uordnet med tilbakelegging: $\binom{n+r-1}{r}$

Det generelle «pigeonhole»-prinsippet:

Hvis N objekter skal plasseres i k bokser, må minst

én boks inneholde minst $\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil$ objekter.

Differensligninger:

Den generelle lineære homogene differensligningen av orden 2 med konstante koeffisienter er på formen

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$$

der c_1 og c_2 er konstanter. Ligningens karakteristiske polynom er gitt ved:

$$r^2 = c_1 r + c_2.$$

Hvis det karakteristiske polynomet har to forskjellige reelle løsninger r_1 og r_2 , blir generell løsning lik

$a_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$ der α og β er vilkårlige konstanter. Hvis startbetingelsene a_0 og a_1 er gitt, finner en α og β ved å løse et ligningssystem.

Hvis det karakteristiske polynomet har kun én løsning r_0 , blir generell løsning lik $a_n = \alpha r_0^n + \beta n r_0^n$ der α og β er vilkårlige konstanter. Hvis startbetingelsene a_0 og a_1 er gitt, finner en α og β ved å løse et ligningssystem.

Relasjoner:

En relasjon R på en mengde A er en delmengde av produktmengden $A \times A$.

La R være en relasjon på en mengde A .

R er refleksiv hvis $(a, a) \in R$ for alle $a \in A$.

R er symmetrisk hvis $(a, b) \in R$, så er $(b, a) \in R$.

R er antisymmetrisk hvis $a \neq b$ og $(a, b) \in R$, så er $(b, a) \notin R$.

R er transitiv hvis $(a, b) \in R$ og $(b, c) \in R$, så er $(a, c) \in R$.

En partisjon

En samling delmengder $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ av en mengde A utgjør en partisjon av A hvis $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n = A$ og $A_i \cap A_j = \emptyset$ for alle $i \neq j$.

Ekvivalensrelasjoner

En relasjon R på en mengde A er en ekvivalensrelasjon hvis den er refleksiv, symmetrisk og transitiv.

Ekvivalensklasser

Hvis R er en ekvivalensrelasjon på en mengde A og $a \in A$, så er ekvivalensklassen $[a]$ til a definert ved $[a] = \{b \in A \mid (a, b) \in R\}$. Eller med ord: $[a]$ er lik mengden av de $b \in A$ som er relatert til a . Ekvivalensklassene til en relasjon utgjør en partisjon av A .

Delvis- eller partiell ordning

En relasjon R på en mengde A er en delvis ordning hvis den er *refleksiv*, *antisymmetrisk* og *transitiv*. Hvis dette er oppfylt, sier vi at A er en delvis ordnet mengde (med hensyn på R). Et element $a \in A$ er et *maksimalt* element hvis det ikke finnes noen $b \in A$ ($b \neq a$) slik at $(a, b) \in R$. Det betyr at det er ikke noe element som kommer «etter» a i ordningen. Tilsvarende er et element $a \in A$ et *minimalt* element hvis det ikke finnes noen $b \in A$ ($b \neq a$) slik at $(b, a) \in R$.

Grafteori:

Graden til et punkt. La a være et punkt (eng: vertex) i en urettet graf. Graden $\text{grad}(a)$ til a er antallet kanter knyttet til punktet.

Grad-kant-setningen:

La G være en urettet graf med endelig mange kanter. Da vil summen av gradene til punktene i G være dobbelt så stor som antallet kanter.

Eulers setning:

En sammenhengende urettet graf med minst to punkter har en lukket Euler-vei (en Euler-sykel) hvis og bare hvis alle punktene i grafen har partallsgrad.

En sammenhengende urettet graf har en åpen (ikke-lukket) Euler-vei hvis og bare hvis nøyaktig to punkter i grafen har oddetallsgrad.