

## Diskret matematikk

### Løsningsforslag til 2. obligatoriske oppgave

Høsten 2024

#### Oppgave 1

c)

$$f(1) = 1, f(6) = 6, f(8) = 1, f(14) = 0$$

$$g(1) = 0, g(6) = 0, g(8) = 1, g(14) = 2$$

$$V_f = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad V_g = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$f$  er ikke en-til-en fordi  $f(1) = f(8) = 1$

$f$  er ikke på fordi  $V_f \neq A$

$g$  er ikke en-til-en fordi  $g(1) = g(6) = 0$

$g$  er på fordi  $V_g = A$

#### Oppgave 2

$$\sum_{i=2}^{10} \sum_{j=1}^5 (i+j) = \sum_{i=2}^{10} ((i+1) + (i+2) + (i+3) + (i+4) + (i+5)) =$$

$$\sum_{i=2}^{10} (5i + 15) = 25 + 30 + 35 + \dots + 60 + 65$$

Dette er en aritmetisk rekke med første element  $a = 25$  og differanse  $d = 5$ .

$$\text{Antall elementer blir } n = \frac{65-25}{5} + 1 = 8 + 1 = 9$$

$$\text{Summen blir: } \frac{65+25}{2} \cdot 9 = 45 \cdot 9 = \underline{405}$$

b)

$$\sum_{j=2}^8 (-2)^j = (-2)^2 + (-2)^3 + (-2)^4 + (-2)^5 + (-2)^6 + (-2)^7 + (-2)^8 =$$

$$4 - 8 + 16 - 32 + 64 - 128 + 256$$

Vi får en geometrisk rekke med første element  $a = 4$  og  $r = -2$ :

$$4(-2)^0 - 4(-2)^1 + 4(-2)^2 - 4(-2)^3 + 4(-2)^4 - 4(-2)^5 + 4(-2)^6$$

$$\sum_{j=0}^6 4(-2)^j = \frac{4((-2)^{6+1}-1)}{-2-1} = \frac{4 \cdot (-129)}{-3} = 4 \cdot 43 = \underline{172}$$

### Oppgave 3

a) Bruker vi multiplikasjonsskjema får vi følgende:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cc} & B \\ & \begin{array}{|c|c|} \hline a & b \\ \hline c & d \\ \hline \end{array} \\ A \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline -1 & 2 & -1 & 4 \\ \hline 1 & 3 & 6 & 6 \\ \hline \end{array}
 \end{array}$$

Dette gir oss følgende to ligningssett med to ukjente i hver:

i)

$$\text{I: } -a + 2c = -1$$

$$\text{II: } a + 3c = 6$$

ii)

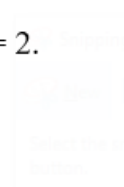
$$\text{I: } -b + 2d = 4$$

$$\text{II: } b + 3d = 6$$

Løser vi disse ligningssettene får vi  $a = 3$ ,  $b = 0$ ,  $c = 1$  og  $d = 2$ .

Dette gir oss følgende matrise:

$$B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$



b)

 $C+D$  er ikke definert! (Har ikke sammen dimensjon)

$$D+E=$$

$$\begin{bmatrix} -2+2 & 1+1 & 3+(-1) \\ 4+(-1) & 3+0 & -2+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$CD=$$

$$\begin{bmatrix} 3 \cdot (-2) + (-1) \cdot 4 & 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 & 3 \cdot 3 + (-1) \cdot (-2) \\ 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 4 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 & 1 \cdot 3 + 2 \cdot (-2) \\ 0 \cdot (-2) + (-3) \cdot 4 & 0 \cdot 1 + (-3) \cdot 3 & 0 \cdot 3 + (-3) \cdot (-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 0 & 11 \\ 6 & 7 & -1 \\ -12 & -9 & 6 \end{bmatrix}$$

$$DC=$$

$$\begin{bmatrix} (-2) \cdot 3 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot 0 & (-2) \cdot (-1) + 1 \cdot 2 + 3 \cdot (-3) \\ 4 \cdot 3 + 3 \cdot 1 + (-2) \cdot 0 & 4 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 + (-2) \cdot (-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -5 \\ 15 & 8 \end{bmatrix}$$

### Oppgave 4

$$A \vee B = \begin{bmatrix} 1 \vee 1 & 1 \vee 0 & 1 \vee 1 \\ 1 \vee 0 & 0 \vee 1 & 1 \vee 0 \\ 1 \vee 1 & 1 \vee 0 & 1 \vee 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad A \wedge B = \begin{bmatrix} 1 \wedge 1 & 1 \wedge 0 & 1 \wedge 1 \\ 1 \wedge 0 & 0 \wedge 1 & 1 \wedge 0 \\ 1 \wedge 1 & 1 \wedge 0 & 1 \wedge 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A \odot B = \begin{bmatrix} (1 \wedge 1) \vee \dots & (1 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1) \vee \dots & (1 \wedge 1) \vee \dots \\ (1 \wedge 1) \vee \dots & (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0) & (1 \wedge 1) \vee \dots \\ (1 \wedge 1) \vee \dots & (1 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1) \vee \dots & (1 \wedge 1) \vee \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

### Oppgave 5

- a) Kvotient  $q = 44 \div 8 = 5$ , Rest  $r = 44 \bmod 8 = 4$
- b) Kvotient  $q = 777 \div 21 = 37$ , Rest  $r = 777 \bmod 21 = 0$
- c) Kvotient  $q = 7 \div 17 = 0$ , Rest  $r = 7 \bmod 17 = 7$
- d) Kvotient  $q = 0 \div 17 = 0$ , Rest  $r = 0 \bmod 17 = 0$
- e) Kvotient  $q = 1234567 \div 101 = \underline{12223}$ , Rest  $r = 1234567 \bmod 101 = 44$

f) NB! Resten kan ikke være negativ! Når enten divisor eller divident er negativ, utfør stedet det tilsvarende positive regnestykket:

$$\begin{array}{r} 221 : 23 = 9 \\ - 207 \\ \hline = 14 \end{array}$$

Da blir resten  $r = 23 - 14 = 9$  og kvotienten  $q = -(9 + 1) = -10$ .

Vi kan sjekke at dette stemmer:

$$a = b \cdot q + r$$

$$-221 = 23 \cdot (-10) + 9 = -230 + 9 = -221$$

## Oppgave 6

- a)  $3 \equiv 17 \pmod{7}$  er sant siden  $7$  går opp i  $3 - 17 = -14$ ,  $43 \equiv 7 \pmod{11}$  er ikke sant siden  $11$  ikke går opp i  $43 - 7 = 36$ .
- b) Vi skal finne fem forskjellige tall  $a$  slik at  $a \equiv 7 \pmod{5}$ . Hvis vi finner ett, kan vi finne flere ved å legge til  $5$ . F.eks. er  $a = 2$  et slik tall siden  $5$  går opp i  $2 - 7 = -5$ . Da får vi også tallene  $2 + 5 = 7$ ,  $7 + 5 = 12$ ,  $12 + 5 = 17$  og  $17 + 5 = 22$ . Det gir de fem tallene  $2, 7, 12, 17$  og  $22$ .
- c) Tverrsummen til  $5937$  er  $5 + 9 + 3 + 7 = 24$  og tverrsummen til  $24$  er  $2 + 4 = 6$ . Tverrsummen til  $65846$  er  $6 + 5 + 8 + 4 + 6 = 29$ , tverrsummen til  $29$  er  $2 + 9 = 11$  og tverrsummen til  $11$  er  $1 + 1 = 2$ . Tverrsummen til  $6 \cdot 2 = 12$  er lik  $1 + 2 = 3$ .

Tverrsummen til  $390927602$  er  $3 + 9 + 0 + 9 + 2 + 7 + 6 + 0 + 2 = 38$ , tverrsummen til  $38$  er  $3 + 8 = 11$  og tverrsummen til  $11$  er  $1 + 1 = 2$ . Det betyr at  $390927602$  **ikke** kan være lik produktet av  $5937$  og  $65846$ .

Tverrsummen til  $390927702$  er  $39$ , tverrsummen til  $39$  er  $3 + 9 = 12$  og tverrsummen til  $12$  er  $1 + 2 = 3$ . Det betyr at  $390927702$  kan være lik produktet av  $5937$  og  $65846$ .

Tverrsummen til  $390927802$  er  $40$  og tverrsummen til  $40$  er  $4 + 0 = 4$ . Det betyr at  $390927802$  **ikke** kan være lik produktet av  $5937$  og  $65846$ .

**Oppgave 7**

a)

|      |      |      |     |     |     |    |    |    |   |   |   |   |
|------|------|------|-----|-----|-----|----|----|----|---|---|---|---|
| 4027 | 2013 | 1006 | 503 | 251 | 125 | 62 | 31 | 15 | 7 | 3 | 1 | 0 |
| 2    | 1    | 1    | 0   | 1   | 1   | 1  | 0  | 1  | 1 | 1 | 1 | 1 |

Binær form:  $4027_{10} = 111110111011_2$ Heksadesimal form:  $111110111011_2 = 1111\ 1011\ 1011_2 = FBB_{16}$ Oktal form:  $111110111011_2 = 111\ 110\ 111\ 011_2 = 7673_8$ b) Binær form:  $A=1010\ 1=0001\ B=1011\ 2=0010\ C=1100\ 3=0011$  $AB2C3_{16} = 101000011011001011000011_2$ Oktal form:  $AB2C3_{16} = 101\ 000\ 011\ 011\ 001\ 011\ 000\ 011_2 = 50331303_8$ Desimal form:  $AB2C3_{16} = 3 + C \cdot 16 + 2 \cdot 16^2 + B \cdot 16^3 + 1 \cdot 16^4 + A \cdot 16^5 = 10597059_{10}$ c) Oktal form:  $1010010001_2 = 1\ 010\ 010\ 001_2 = 1221_8$ Heksadesimal form:  $1010010001_2 = 10\ 1001\ 0001_2 = 291_{16}$ Desimal form:  $1010010001_2 = 291_{16} = 2 \cdot 16^2 + 9 \cdot 16 + 1 = 657_{10}$ **Oppgave 8**

$$1) \sum_{k=0}^7 6 \cdot 16^k = 6 \frac{16^8 - 1}{16 - 1} = \frac{2}{5} (16^8 - 1) = \frac{2}{5} 4294967295 = 1717986918$$

2)

$$a = 101101101101101101101101101101101_2 = 555555555_8 = \sum_{j=0}^9 5 \cdot 8^j = 5 \frac{8^{10} - 1}{8 - 1} = 766958445$$

**Oppgave 9**

- a) Den raskeste måten å finne primtallene fra 100 til 150 er faktisk å finne de som ikke er primtall. Vi har  $\lfloor \sqrt{150} \rfloor = 12$  og dermed er 11 største mulige primtallsfaktorer. Vi skriver først opp alle tallene fra 100 til 150. Så streker vi over alle partallene, så hvert tredje tall fra og med 102 (de er delelige med 3), så hvert femte tall fra og med 105 (de er delelige med 5), så hvert syvende tall fra og med 105 (de er delelige med 7) og til slutt hvert ellevte tall fra og med 110. Da står en igjen med de ti primtallene

101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149.

- b)  $25! = 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$   
 $25 = 5^2$ ,  $24 = 2^3 \cdot 3$ ,  $22 = 2 \cdot 11$ ,  $21 = 3 \cdot 7$ ,  $20 = 2^2 \cdot 5$ ,  $18 = 2 \cdot 3^2$ ,  $16 = 2^4$ ,  $15 = 3 \cdot 5$ ,  
 $14 = 2 \cdot 7$ ,  $12 = 2^2 \cdot 3$ ,  $10 = 2 \cdot 5$ ,  $9 = 3^2$ ,  $8 = 2^3$ ,  $6 = 2 \cdot 3$ ,  $4 = 2^2$

Dermed  $25! = 2^{22} \cdot 3^{10} \cdot 5^6 \cdot 7^3 \cdot 11^2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23$

- c) Vi ser at  $25!$  inneholder faktoren 5 sammenlagt 6 ganger og dermed faktoren 10 sammenlagt 6 ganger siden vi også har (minst) 6 2-ere. Det betyr at  $25!$  har 6 nuller bakerst. Tallet  $25!$  utregnet blir

15511210043330985984000000.

**Oppgave 10**

- a)  $72 = 2^3 \cdot 3^2$ ,  $420 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$   
 $\gcd(72, 420) = 2^2 \cdot 3 = 12$

- b)  $\text{lcm}(72, 420) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 2520$

- c) Euklids algoritme:

| $a$ | $b$ | $r = a \bmod b$ |
|-----|-----|-----------------|
| 420 | 72  | 60              |
| 72  | 60  | 12              |
| 60  | 12  | 0               |

Vi ser at største felles divisor blir 12.

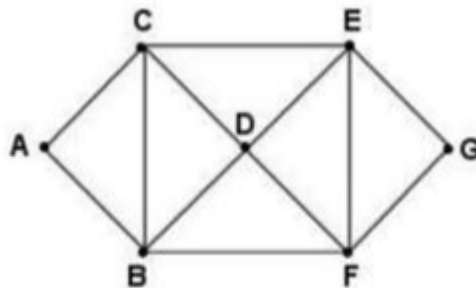
- d) Euklids algoritme:



| $a$   | $b$   | $r = a \bmod b$ |
|-------|-------|-----------------|
| 53295 | 10920 | 9615            |
| 10920 | 9615  | 1305            |
| 9615  | 1305  | 480             |
| 1305  | 480   | 345             |
| 480   | 345   | 135             |
| 345   | 135   | 75              |
| 135   | 75    | 60              |
| 75    | 60    | 15              |
| 60    | 15    | 0               |

Vi ser at største felles divisor blir 15.

### Oppgave 11



- a)  $\text{grad}(A)=2$ ,  $\text{grad}(B)=4$ ,  $\text{grad}(C)=4$ ,  $\text{grad}(D)=4$ ,  
 $\text{grad}(E)=4$ ,  $\text{grad}(F)=4$ ,  $\text{grad}(G)=2$ .
- b) Det finnes ingen åpen Euler-vei siden det ikke er  
slik at nøyaktig to punkter har oddetallsgrad og resten  
partallsgrad.
- c) Svaret er ja siden alle punktene har partallsgrad.  
F.eks. er dette en vei:  $A-B-F-G-E-C-D-F-E-D-B-C-A$ .
- d) Hvis G fjernes, vil E og F få oddetallsgrad, mens resten  
har partallsgrad. Da vil det finnes en åpen Euler-vei.

### Oppgave 12

i) ISBN-13 for læreboken er 978-0-07-131501-2. Da får vi  $(9 + 8 + 0 + 1 + 1 + 0 + 2) + 3(7 + 0 + 7 + 3 + 5 + 1) = 21 + 3 \cdot 23 = 90$ . Det stemmer at  $90 \equiv 0 \pmod{10}$ .

ii) Vi får  $(9 + 8 + 0 + 3 + 0 + 7 + x) + 3(7 + 0 + 7 + 2 + 6 + 9) = 27 + x + 3 \cdot 31 = x + 120$ . Velger vi  $x = 0$ , vil vi få en lovlig ISBN-13.

