

Løsningsforslag til oblig 1 i DM 2024

Oppgave 1a)

1) Bruk av sannhetsverditabell:

p	q	$\neg p$	$p \vee q$	$(p \vee q) \wedge \neg p$	$((p \vee q) \wedge \neg p) \rightarrow q$
S	S	U	S	U	S
S	U	U	S	U	S
U	S	S	S	S	S
U	U	S	U	U	S

Vi ser at $((p \vee q) \wedge \neg p) \rightarrow q$ er en tautologi, dvs. er sant for alle kombinasjoner av p og q .

2) Direkte argumentasjon:

Den eneste måten utsagnet kan bli usant på er at høyre side av implikasjonen (dvs. q) er usann og venstre side (dvs. $(p \vee q) \wedge \neg p$) er sann. Men hvis q er usann, vil $p \vee q \equiv p$ og dermed $(p \vee q) \wedge \neg p \equiv p \wedge \neg p$ og det siste er alltid usant. Med andre ord hvis høyre side er usann, må også venstre side være usann.

3) Bruk av formler:

$$\begin{aligned}
 & ((p \vee q) \wedge \neg p) \rightarrow q && \text{bruker distributiv lov på } (p \vee q) \wedge \neg p \\
 \equiv & ((p \wedge \neg p) \vee (q \wedge \neg p)) \rightarrow q && \text{bruker at } p \wedge \neg p \equiv U(\text{usann}) \\
 \equiv & (U \vee (q \wedge \neg p)) \rightarrow q && \text{bruker at } U \vee (q \wedge \neg p) \equiv q \wedge \neg p \\
 \equiv & (q \wedge \neg p) \rightarrow q && \text{bruker at } (q \wedge \neg p) \rightarrow q \equiv \neg(q \wedge \neg p) \vee q \\
 \equiv & \neg(q \wedge \neg p) \vee q && \text{bruker DeMorgans lov på } \neg(q \wedge \neg p) \\
 \equiv & \neg q \vee p \vee q && \text{bruker at } \neg q \vee q \equiv S(\text{sann}) \\
 \equiv & S \vee p \equiv S
 \end{aligned}$$

Oppgave 1b)

p	q	r	$q \wedge r$	$p \rightarrow q$	$p \rightarrow r$	$p \rightarrow (q \wedge r)$	$(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$
S	S	S	S	S	S	S	S
S	S	U	U	S	U	U	U
S	U	S	U	U	S	U	U
S	U	U	U	U	U	U	U
U	S	S	S	S	S	S	S
U	S	U	U	S	S	S	S
U	U	S	U	S	S	S	S
U	U	U	U	S	S	S	S

Vi ser at kolonnene for $p \rightarrow (q \wedge r)$ og $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$ har de samme sannhetsverdiene og de to utsagnene er dermed ekvivalente.

Oppgave 2

p : «Det regner»

q : «Det blåser»

a) ikke p og ikke q blir: $\neg p \wedge \neg q = \neg(p \vee q)$

b) q hvis ikke p blir det samme som hvis ikke p så q : $\neg p \rightarrow q$

c) p bare hvis ikke q blir: $p \rightarrow \neg q$ $\neg \wedge \vee \neg$

d) Både p og q blir: $p \wedge q$

e) Verken p eller q blir: $\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$

f) $\neg q$ er nødvendig for p betyr at $\neg q$ må være sann for at p skal være sann. Med andre ord at hvis $\neg q$ er usann så må p være usann. Dette kan oversettes til $\neg \neg q \rightarrow \neg p$ eller $q \rightarrow \neg p$ som er det kontrapositive utsagnet til $p \rightarrow \neg q$ («Hvis det regner er det vindstille»)

g) q er tilstrekkelig for ikke p blir: $q \rightarrow \neg p$

Oppgave 3

$P(x)$: « x har en bærbar pc»

$Q(x)$: « x har en Mac»

a) Når vi har «Alle» må vi bruke all-kvantoren, dvs. slik: $\forall x(P(x) \vee Q(x))$

b) Dette kan vi skrive slik: For alle studenter gjelder at hvis studenten har en Mac, så har studenten en bærbar pc. «For alle» gir at vi må bruke all-kvantoren og hvis at vi har en implikasjon. Dette kan settes opp slik: $\forall x(Q(x) \rightarrow P(x))$. Det er mulig å skrive det annerledes. Husk at hvis a og b er to utsagn, så er $a \rightarrow b$ ekvivalent med $\neg a \vee b$.

Dermed får vi at $\forall x(Q(x) \rightarrow P(x))$ er ekvivalent med $\forall x(\neg Q(x) \vee P(x))$ som igjen er ekvivalent med (DeMorgans lov) $\neg \exists x(Q(x) \wedge \neg P(x))$. Dette oversettes til:
 «Det er ingen studenter som har Mac uten at de har bærbar pc.»

c) «Det er en student som . . . » betyr at «det finnes en x som . . . ». Dermed må vi bruke eksistenskvantoren. Med andre ord slik: $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$

d) «Det finnes en . . . » betyr at vi må bruke eksistenskvantoren: $\exists x(P(x) \wedge \neg Q(x))$

e) «Det er ingen» betyr at vi må bruke eksistenskvantoren med et ikke foran. Dvs. slik: $\neg \exists x(\neg(P(x) \vee Q(x)))$. Det er ekvivalent med (DeMorgans lov): $\forall x(P(x) \vee Q(x))$.

Oppgave 4.

a) Usant. Det finnes ikke ett tall m slik at alle tall n opphøyd i andre blir lik dette tallet m .

F.eks $2^2 \neq 3^2$

b) Usant. Det holder å finne et tall for m som gjør utsagnet usant.

F.eks. hvis for eksempel $m = -100$, så finnes ingen n som oppfyller kravet. ($n^2 \geq 0$)

c) Usant. Det holder å finne et tall for m som gjør utsagnet usant.

Hvis for eksempel $m = -1$ og $n = 1$, så er ikke $mn > n$. (-1 er ikke større enn 1)

d) Sant. Vi kan velge $m = n^2$.

e) Usant. Det holder å finne et tall for m som gjør utsagnet usant.

Hvis $m = 2$ finnes det ikke noe helt tall n slik at $n^2 = 2$. (Husk at n og m er hele tall.)

Oppgave 5

a) Usant siden 5 ikke går opp i 6.

b) Sant siden 2 går opp i 6

c) Usant. Bruk a) som mot-eksempel.

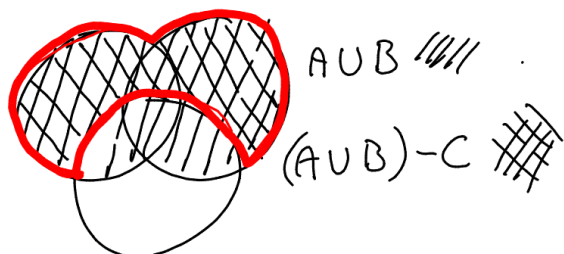
d) Sant. Tallet $m = 1$ går opp i alle tall n .

e) Sant. Alle tall m (forskjellig fra 0) går opp i $n = 0$.

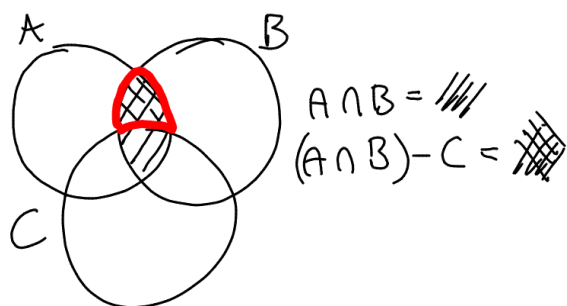
Oppgave 6

a)

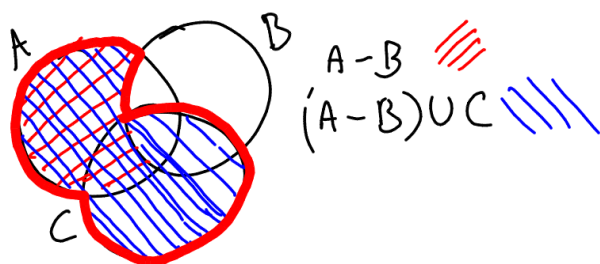
i)



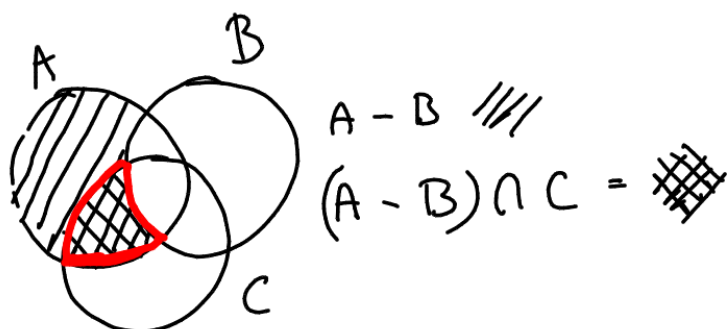
ii)



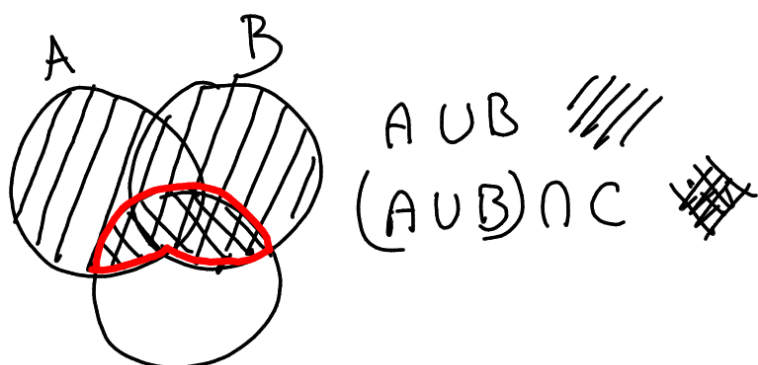
iii)



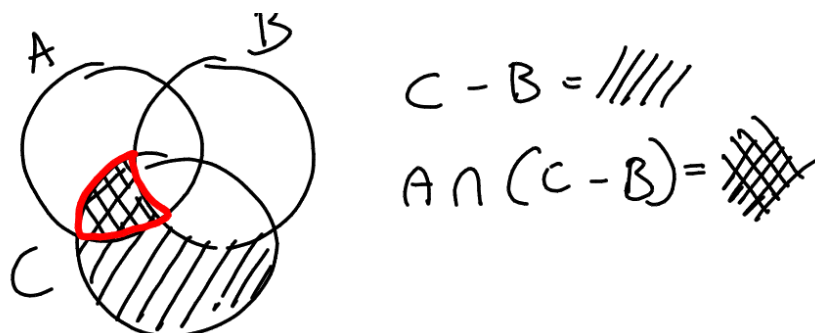
b) $(A - B) \cap C$



$(A \cup B) \cap C$



$A \cap (C - B)$



Vi ser av Venn-diagrammene at $(A - B) \cap C = A \cap (C - B)$

c)

i) $A \cap B = \{c, d, \}$

ii) $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f\}$

iii) $\bar{A} = \{e, f, g, h\}$

iv) $\bar{B} = \{a, b, g, h\}$

v) $\overline{A \cap B} = \{a, b, e, f, g, h\}$

$$\text{vi) } \overline{A \cup B} = \{a, b, e, f, g, h\}$$

$$\text{vii) } \overline{A \cap B} = \{g, h\}$$

$$\text{viii) } \overline{A} \cap \overline{B} = \{g, h\}$$

Vi ser at $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ og $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$. Dette er rett og slett DeMorgans lover for mengder.

Oppgave 7

La A være mengden av de som tar *Algoritmer og datastrukturer*, O de som tar *Operativsystemer* og W de som tar *Web-programmering*. En oppgave av denne typen kan løses på flere måter. En måte er å bruke formler for antall i mengder. En annen måte er å «fylle ut» et Venn-diagram. Det er normalt enklest å bruke Venn-diagram.

1) Formler for antall i mengder

Inklusjon-eksklusjonsformelen sier at

$$|A \cup O \cup W| = |A| + |O| + |W| - |A \cap O| - |A \cap W| - |O \cap W| + |A \cap O \cap W|$$

$$\text{a) Vi får at } |A \cup O \cup W| = 180 + 166 + 178 - 156 - 160 - 152 + 150 = 206.$$

dvs. 206 studenter tar minst ett emne. Da blir det $220 - 206 = \underline{14}$ som ikke tar noe emne.

$$\text{b) Vi skal finne antallet i } (A \cap O) - W. \text{ Denne mengde er lik } (A \cap O) - A \cap O \cap W.$$

Siden $A \cap O \cap W$ er en delmengde av $A \cap O$ får vi

$$|A \cap O| - |A \cap O \cap W| = 156 - 150 = \underline{6}.$$

$$\text{c) På samme måte som i b) kan vi finne at } |(A \cap W) - O| = 10 \text{ og at } |(O \cap W) - A| = 2.$$

Svaret blir derfor $6 + 10 + 2 = \underline{18}$.

$$\text{d) Her skal vi finne antallene i } A - (W \cup O), O - (A \cup W) \text{ og } W - (A \cup O).$$

Antallet i $A - (W \cup O)$ er lik antallet i $A - (A \cap (W \cup O))$.

$$|A - A \cap (W \cup O)| = |A| - |A \cap (W \cup O)|.$$

Videre har vi at $A \cap (W \cup O) = (A \cap W) \cup (A \cap O)$.

$$\text{Dermed blir } |A - (W \cup O)| = |A \cap W| + |A \cap O| - |A \cap O \cap W|.$$

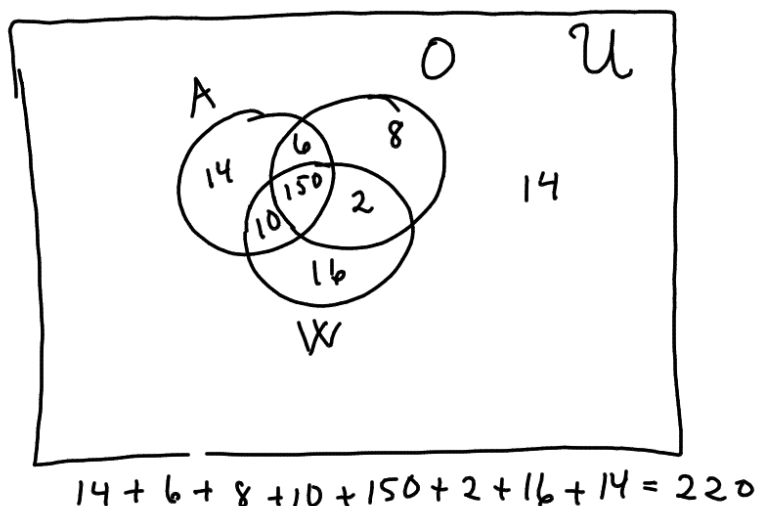
$$\text{Tilsammen får vi at } |A - (W \cup O)| = 180 - (160 + 156 + 150) = 14.$$

$$\text{På tilsvarende måte kan vi finne ut at } |O - (A \cup W)| = 8 \text{ og at } |W - (A \cup O)| = 16.$$

$$\text{Svaret blir derfor } 14 + 8 + 16 = \underline{38}$$

Bruk av Venn-diagram.

Det enkleste er nok å bruke Venn-diagram. Opplysningene legges inn i Venn-diagrammet slik at hvert tall står for **antallet elementer i den delmengden der tallet står**. Vi starter med å fylle ut området i midten. Det representerer området $A \cap O \cap W$ der tallet er 150. Så fortsetter vi utover og regner ut mengde for mengde ut fra de opplysningene som er gitt i oppgaven. Når alle tallene er lagt inn skal summen bli lik antall elementer i U .

**Oppgave 8****a)**

i)

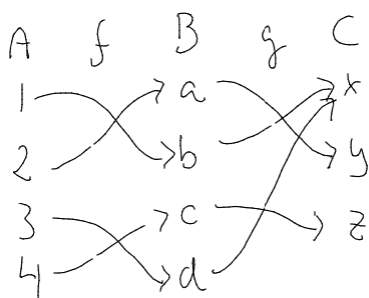
f er ikke definert for $x = 0$ fordi divisjon med 0 er udefinert.

Hvis f skal være en funksjon må den være definert for alle elementene i definisjonsmengden. Siden 0 er element i $\mathbb{R}$, som her er definisjonsmengden, er f IKKE en funksjon.

ii)

Hvis f skal være en funksjon kan f kun ha én funksjonsverdi for hver verdi vi setter inn for x . Her har f to verdier for hver x og følgelig er f IKKE en funksjon. Eks. $f(1)$ er både lik $+\sqrt{2}$ og $-\sqrt{2}$.

b)



Vi ser at f er **en-til-en** siden det ikke går mer enn én pil inn til noe element i B. f er også **på** siden det går en pil til alle elementene i B.

Funksjonen g er derimot **ikke en-til-en** siden det går to piler inn til elementet x. Men g er **på** siden det går en pil til alle elementene i C.

Vi får $h(1) = g(f(1)) = g(b) = x$. På samme måte får vi at

$h(2) = y$, $h(3) = x$ og $h(4) = z$.

For at h skal ha en invers funksjon må den være både en-til-en og på.

Vi ser at h er **på** men **ikke er en-til-en** og den har derfor ingen invers funksjon.

c)

$$f(1) = 1, f(6) = 6, f(8) = 1, f(14) = 0$$

$$g(1) = 0, g(6) = 0, g(8) = 1, g(14) = 2$$

$$Vf = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad Vg = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

f er ikke en-til-en fordi $f(1) = f(8) = 1$

f er ikke på fordi $Vf \neq A$

g er ikke en-til-en fordi $g(1) = g(6) = 0$

g er på fordi $Vg = A$

Oppgave 9

a) i) Dette er en aritmetisk rekke siden differensen mellom et ledd og det foregående leddet er fast lik 2.

$$ii) a_0 = 5, a_n = 5 + 2n$$

iii) Indeks til siste ledd: Finn n slik at $5 + 2n = 99$. Det gir $n = \frac{99-5}{2} = 47$. Dermed

$N = 47$. Rekken har $1 + 47 = 48$ ledd.

$$iv) \text{ Summen er gitt ved } \frac{(5+99) \cdot 48}{2} = 2496$$

b) i) Dette er en geometrisk rekke siden forholdet (brøken) mellom et ledd og det foregående leddet er fast lik -2 .

ii) $a_0 = 1$, $a_n = (-2)^n$

iii) Indeks til siste ledd: Finn n slik at $(-2)^n = 1024$. Vi ser med en gang at $n = 10$.
Dermed er $N = 10$. Rekken har $1 + 10 = 11$ ledd.

iv) Summen er gitt ved $\sum_{n=0}^{10} (-2)^n = \frac{(-2)^{11} - 1}{-2 - 1} = \frac{-2048 - 1}{-3} = \frac{2049}{3} = 683$.

c) i) Dette er en aritmetisk rekke siden differensen mellom et ledd og det foregående leddet er fast lik 4 .

ii) $a_0 = 10$, $a_n = 10 + 4n$

iii) Indeks til siste ledd: Finn n slik at $10 + 4n = 94$. Det gir $n = \frac{94 - 10}{4} = 21$ og
dermed $N = 21$. Rekken har $1 + 21 = 22$ ledd.

iv) Summen er gitt ved $\frac{(10 + 94) \cdot 22}{2} = 1144$.

d) i) Dette er en geometrisk rekke siden forholdet (brøken) mellom et ledd og det foregående leddet er fast lik $\frac{1}{2}$.

ii) $a_0 = \frac{1}{2}$, $a_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n$

iii) Indeks til siste ledd: Finn n slik at $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{64}$ eller $\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{32}$. Vi ser med en gang at n må være lik 5 . Dermed $N = 5$. Rekken har $1 + 5 = 6$ ledd.

iv) Summen er gitt ved $\sum_{n=0}^5 \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^6 - 1}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{1}{2} \frac{\frac{1}{64} - 1}{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \frac{-\frac{63}{64}}{-\frac{1}{2}} = \frac{63 \cdot 2}{2 \cdot 64} = \frac{63}{64}$.

e)

$$\sum_{i=0}^2 \sum_{j=1}^3 ij = \sum_{i=0}^2 (i + 2i + 3i) = \sum_{i=0}^2 6i = 6 \cdot 0 + 6 \cdot 1 + 6 \cdot 2 = 18$$