

Diskret matematikk – høsten 2024

Første obligatoriske oppgave

Innleveringsfrist: mandag 23. september 2024 kl. 23:59.

Oppgaven kan løses i **grupper på 2 eller 3 studenter**. Dere leverer da **én felles besvarelse**. Hvis du likevel velger å løse oppgaven alene, må du ta kontakt med en annen student, gjerne en som også har løst oppgaven alene, og sammenligne svarene dere har kommet frem til. Deretter leverer dere en felles besvarelse med de løsningene dere sammen har kommet frem til er de riktige.

Besvarelsen skal lastes opp i Canvas som **én enkelt pdf-fil** (hvis dere har skrevet for hånd, må dere scanne inn **alle** arkene og lagre dem i **en og samme pdf-fil**).

Før dere laster opp filen må dere melde alle gruppemedlemmene inn i en ledig oblig-gruppe og registrere alle medlemmene i denne gruppen. Oppgaven lastes deretter opp av kun én person på gruppen. **NB! Dere kan IKKE laste opp besvarelsen i egendefinerte grupper!** Da vil den ikke bli registrert! Bruk de forhåndsdefinerte oblig-gruppene.

Selv om gruppemedlemmenes navn er registrert på gruppen **må** dere skrive inn følgende informasjon **i selve besvarelsen**:

Navnene på alle som står bak løsningen skal stå **ØVERST på første side**.

Skriv **fullt navnet og studentnummer** på **alle** medlemmene i gruppen.

NB! Det er kun de som har navnet sitt på selve besvarelsen som får oppgaven godkjent. Det er ikke nok å være registrert som medlem i gruppen.

Oppgave 1

a) Er $(\neg p \wedge (p \vee q)) \rightarrow q$ en selvmotsigelse eller en tautologi eller ingen av delene?

b) Er $p \rightarrow (q \wedge r)$ og $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$ er logisk ekvivalente?

Bruk sannhetsverditabell eller vis det på en annen måte.

Oppgave 2

La p og q være utsagn:

p : «Det regner»

q : «Det blåser»

Skriv følgende. utsagn ved hjelp av p , q og logiske operatorer:

- a) «Det er oppholdsvær og vindstille.»
- b) «Det blåser hvis det ikke regner.»
- c) «Det regner bare hvis det er vindstille.»
- d) «Det både regner og blåser.»
- e) «Det verken regner eller blåser.»
- f) «Det er nødvendig at det er vindstille for at det skal regne.»
- g) «Det at det blåser er tilstrekkelig for at det ikke regner.»

Oppgave 3

La P og Q være utsagnsfunksjoner:

$P(x)$: « x har en bærbar pc »

$Q(x)$ « x har en Mac »

Variabelen x står for en student i faget Diskret matematikk.

Skriv følgende utsagn ved hjelp av $P(x)$, $Q(x)$, kvantorer og logiske operatorer:

- a) «Alle studenter har bærbar pc eller Mac.»
- b) «Hvis en student har en Mac, så har studenten også bærbar pc.»
- c) «Det er en student som har både bærbar pc og en Mac.»
- d) «Det finnes en student som har bærbar pc, men ikke Mac.»
- e) «Det er ingen studenter som verken har bærbar pc eller Mac.»

Oppgave 4

La m og n være hele tall. Avgjør for hvert av følgende utsagn om det er sant eller usant:

- a) $\exists m \forall n (n^2 = m)$
- b) $\forall m \exists n (n^2 - m < 100)$
- c) $\forall m \forall n (mn > n)$
- d) $\forall n \exists m (n^2 = m)$
- e) $\forall m \exists n (n^2 = m)$

Oppgave 5

La m og n være hele tall med $m > 0$ og la $P(m,n)$ stå for utsagnet « m går opp i n ».

Det at m går opp i n betyr at vi ikke får noen rest når n deles med m .

Avgjør for hvert av følgende utsagn om det er sant eller usant. Gi en begrunnelse i hvert tilfelle.

- a) $P(5,6)$
- b) $P(2,6)$
- c) $\forall m \forall n P(m,n)$
- d) $\exists m \forall n P(m,n)$
- e) $\exists n \forall m P(m,n)$

Oppgave 6

NB! Teorien som trengs for å løse denne oppgaven blir gjennomgått i uke 36 og 37.

La A , B og C være vilkårlige mengder.

a) Bestem følgende mengder ved hjelp av venndiagram:

- i) $(A \cup B) - C$
- ii) $(A \cap B) - C$
- iii) $(A - B) \cup C$

b) Bruk venndiagram til å avgjøre om noen av mengdene

$(A - B) \cap C$, $(A \cup B) \cap C$ og $A \cap (C - B)$ er like.

c) La universalmengden $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$. La så mengdene A og B være delmengder av U , der $A = \{a, b, c, d\}$ og $B = \{c, d, e, f\}$.

Finn mengdene

$A \cap B$, $A \cup B$, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{A \cap B}$, $\overline{A \cup B}$, $\overline{A \cap B}$ og $\overline{A} \cap \overline{B}$.

Hvilke av disse mengdene er like?

Oppgave 7

NB! Teorien som trengs for å løse denne oppgaven blir gjennomgått i uke 37.

I en gruppe på 220 studenter er det 180 stykker som tar emnet *Algoritmer og datastrukturer*, 166 som tar emnet *Operativsystemer* og 178 som tar emnet *Web-programmering*. Det er 156 som tar både *Algoritmer og datastrukturer* og *Operativsystemer*, 160 som tar både *Algoritmer og datastrukturer* og *Web-programmering* og 152 som tar både *Operativsystemer* og *Web-programmering*. Det er 150 stykker som tar alle tre emnene.

a) Hvor mange er det som ikke tar noen av de tre emnene?

b) Hvor mange tar både *Algoritmer og datastrukturer* og *Operativsystemer*, men ikke *Web-programmering*?

c) Hvor mange tar *kun* to emner?

d) Hvor mange tar *kun* ett emne?

Bruk venndiagram til å løse oppgaven.

Oppgave 8

NB! Teorien som trengs for å løse denne oppgaven blir gjennomgått i uke 38.

a) La $\mathbb{R}$ være mengden av de reelle tallene.

Forklar hvorfor f IKKE er en funksjon fra $\mathbb{R}$ til $\mathbb{R}$:

i) $f(x) = \frac{1}{x}$

ii) $f(x) = \pm \sqrt{x^2 + 1}$

b)

La $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, c, d\}$ og $C = \{x, y, z\}$.

La funksjonene f og g være gitt ved:

$$f: A \rightarrow B \text{ der } f(1) = b, f(2) = a, f(3) = d, f(4) = c$$

$$g: B \rightarrow C \text{ der } g(a) = y, g(b) = x, g(c) = z, g(d) = x.$$

For hver av funksjonene skal følgende avgjøres:

- Er funksjonen *en-til-en*?
- Er funksjonen *på*?

Finn sammensetningen $h = g \circ f$, dvs. finn $h(1)$, $h(2)$, $h(3)$ og $h(4)$.

Har h en invers funksjon? Begrunn svarene!

Oppgave 9

NB! Teorien som trengs for å løse denne oppgaven blir gjennomgått i uke 38.

For følgende rekker skal du

- Avgjøre hva slags type rekke det er.
- Finne det første leddet og det generelle leddet.
- Finne indeksen N til siste ledd slik at rekken blir lik

$$\sum_{n=0}^N a_n \quad (\text{det betyr at rekken har } N+1 \text{ ledd})$$

- Finne summen av rekken ved hjelp av en formel

a) $5 + 7 + 9 + \dots + 97 + 99$

b) $1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + \dots - 512 + 1024$

c) $10 + 14 + 18 + 22 + \dots + 86 + 90 + 94$

d) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64}$ (Oppgi helst summen som en brøk)

e) Bestem følgende sum:

$$\sum_{i=0}^2 \sum_{j=1}^3 ij$$

SLUTT