

# Diskret matematikk DAPE1300



# Hva er matematikk?

- **Matematikk** er, likhet med norsk, engelsk og Java, et **språk** om man kan **uttrykke noe i**, f.eks. **sammenhenger** og **sannheter**.
- **Symbolene** i språket matematikk er tallene **0, 1, ..., 9**, ulike regneoperatorene, blant annet: **+**, **-**, **\*** og **/**, samt enkelte bokstaver.
- I dette faget skal vi lære å bruke **mange nye matematiske symboler**.

# Hvorfor skal dere lære Diskret matematikk?

- Diskret matematikk vil gjøre det lettere å tilegne seg og **forstå** innholdet av de andre datafagene på studiet.
- Lære å tenke selv!!!
- Gir **mental kondisjon**: Løse problemer ved **tankens kraft**, ikke ved å lete etter andres løsninger.

# Dere får bruk for denne kunnskapen i **andre datafag**, blant annet i

- Programmering
- Programutvikling
- Algoritmer og datastrukturer
- Databaser
- Operativsystemer
- Kompilatorteknikk
- Datasikkerhet
- Kryptering
- Systemadministrasjon
- Kunstig intelligens
- Maskinlæring
- Software testing

**Diskret matematikk** kalles gjerne for

# **Data-matematikk**

fordi det er denne type matematikk som brukes i  
datamaskiner, både i **hardware** og **software**,  
**operativsystemer** og **programmeringsspråk**.

# Men hva betyr det at matematikken er **diskret**?

DM kan best beskrives ved det det **ikke er**:

- Diskret Matematikk er «**Ikke-kontinuerlig**» matematikk.  
Kontinuerlig betyr sammenhengende, jfr. funksjoner i calculus og analyse.
- DM består av **distinkte elementer** som heltall, sannhetsverdier som true/false, tellbare mengder m.m.
- Se wikipedias definisjon:  
[https://en.wikipedia.org/wiki/Discrete\\_mathematics](https://en.wikipedia.org/wiki/Discrete_mathematics)

# Eksempler på type problemer vi kan løse:

- Hvor mange gyldige passord kan velges på et system?
- Hvor mange gyldig internettadresser er det?
- Hvor stor sjanse er det for å vinne i Lotto eller andre spill?
- Fins det en link mellom to datamaskiner i et nettverk?
- Hvordan kan jeg identifisere spam-mail?
- Hva er den korteste veien mellom to byer hvis jeg bruker offentlig transport?

- **Hvordan kan jeg sortere en liste av tall?**
- **Hvor mange trinn trengs for å utføre sorteringen?**
- **Hvordan blir to tall lagt sammen av en datamaskinen?**
- **Hvordan blir tall representert binært?**
- **Hvordan kan man bevise (matematisk) at en algoritme gjør det den skal?**



# Emner innen diskre matematikk:

- Utsagnslogikk og predikatlogikk
- Mengdelære
- Generelle funksjoner
- Følger og rekker
- Tallmatriser og logiske matriser
- Algoritmer og algoritmeorden
- Tallteori
- Heltallsregning
- Tallsystemer
- Kongruensregning
- Bevisteknikk
- Induksjon
- Kombinatorikk
- Binomialkoeffisienter
- Differensligninger
- Relasjoner og ordninger
- Grafer og trær

## Eksempel: Hanois tårn

Legenden forteller at ved jordas begynnelse plasserte Gud **tre** alen høye stolper på en messingplate ved tempelet Benares, verdens midtpunkt. På en av stolpene plasserte han 64 gullskiver. Den største lå nederst, og så ble platene mindre og mindre oppover søylen. Dette kalles Brahmas tårn, eller Tårnet i Hanoi.

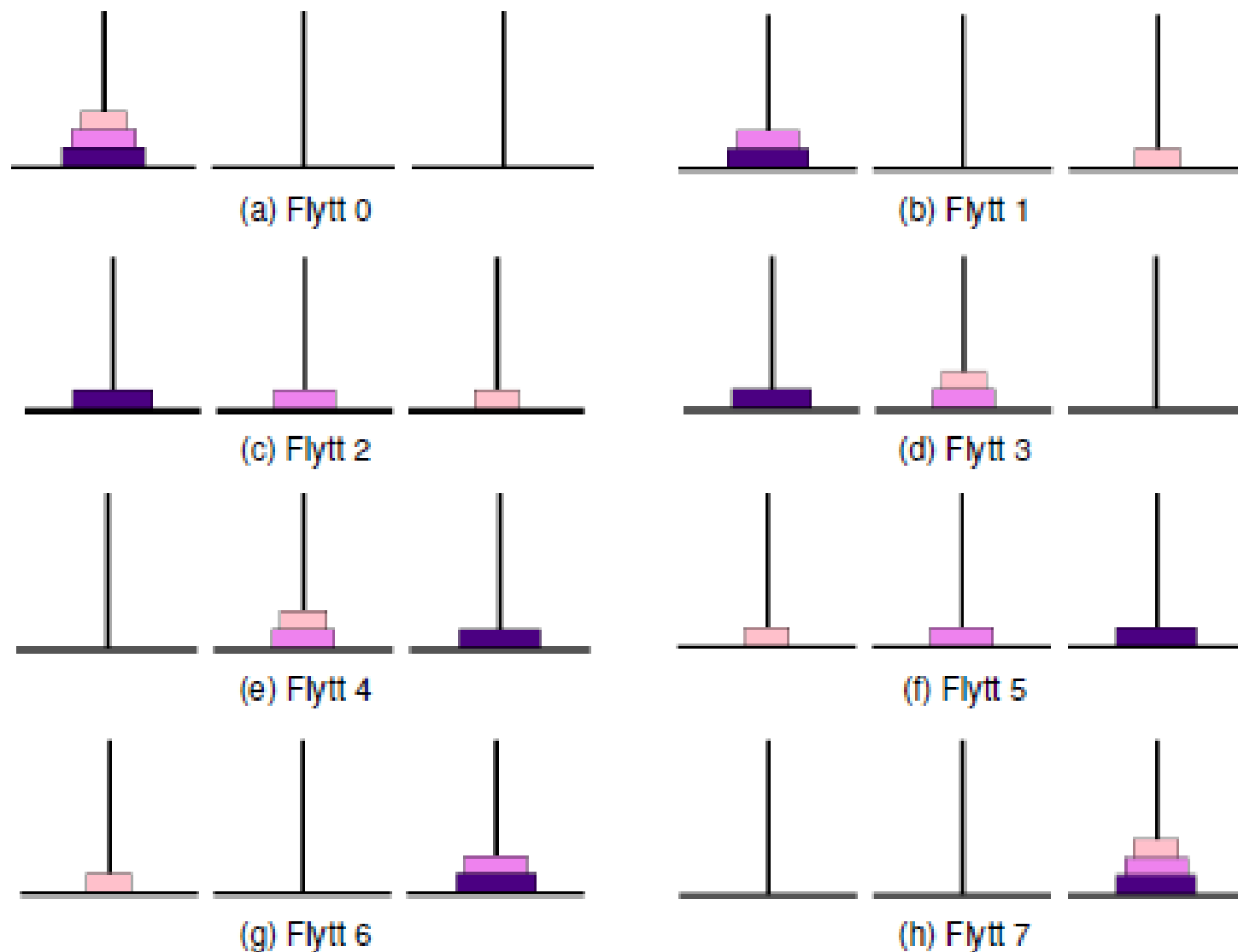
Dag og natt, og uten stans, flytter prestene gullskiver fra den ene stolpen og over på de andre etter Brahmas uforanderlige regler:

- Kun en plate kan flyttes av gangen
- En plate skal aldri legges oppå en som er mindre

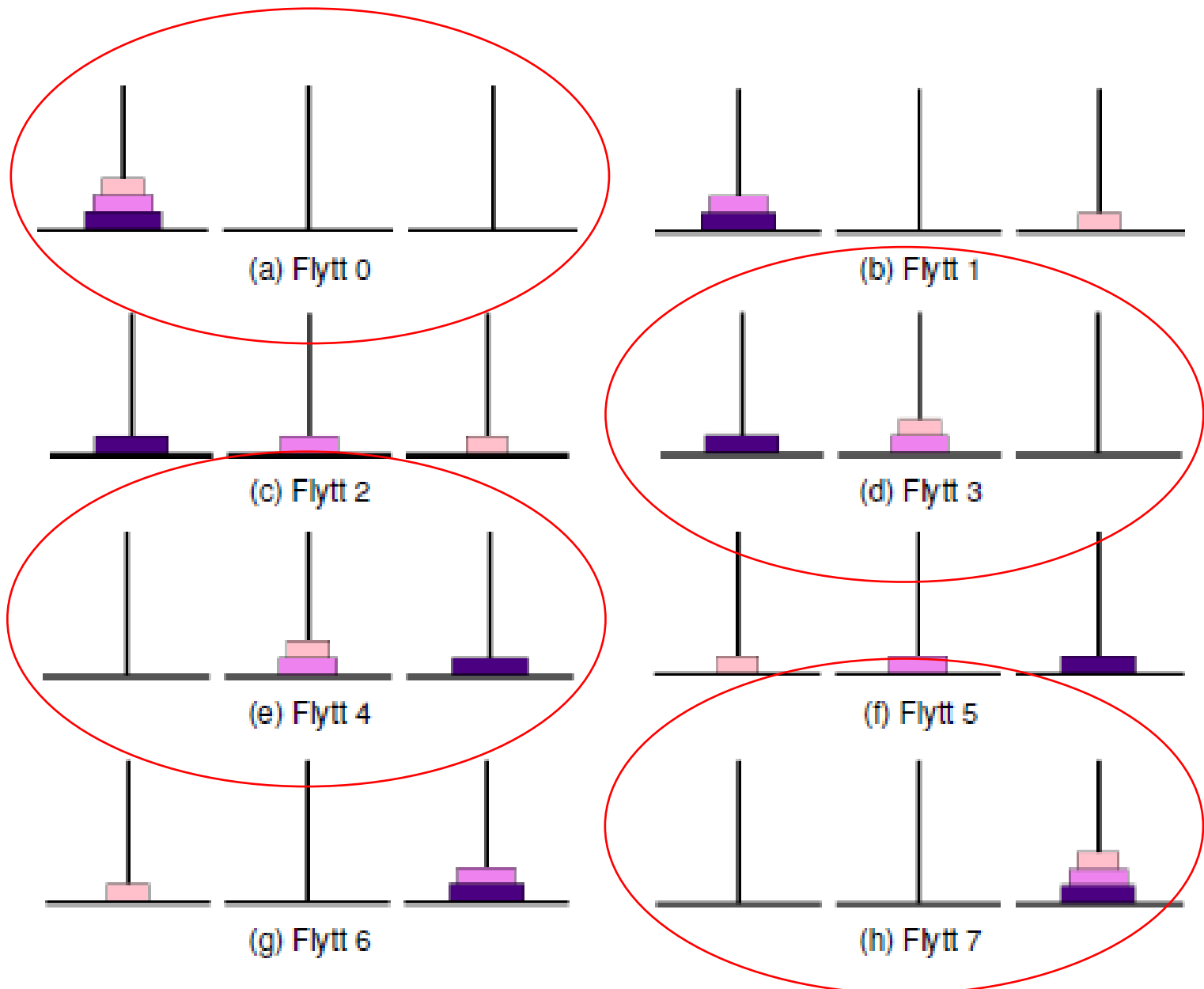
Målet er å få hele tårnet flyttet over til en av de andre stolpene. Når dette er gjort, vil verden gå under og bli til støv.

Denne legenden ble oppfunnet av den franske matematikeren Edouard Lucas i 1883. Siden 1883 har det blitt laget utallige utgaver av Hanois tårn som puslespill.

[Prøv selv!](#)



Figur 1.2: Miniversjon av Hanois tårn og de syv flyttene som løser problemet.



Figur 1.2: Miniversjon av Hanols tårn og de syv flyttene som løser problemet.

La  $H_n$  være det minste antallet trekk som trengs for å flytte  $n$  skiver. Da vi utførte oppgaven med tre skiver fant vi ut at  $H_3 = 7$ . La oss spole tilbake og resonnere over hvordan vi løste oppgaven. I utgangspunktet lå alle skivene på søylen til venstre. I vårt tilfelle var  $n = 3$ .

1. Først fjernet vi de to skivene som lå oppå den nederste og største skiven, dvs. vi flyttet  $n - 1 = 2$  skiver til den midterste søyle ved å bruke søylen til høyre søyle som hjelpesøyle. Fordi vi flyttet  $n - 1$  skiver blir antall flytt  $H_{n-1}$ .
2. Deretter flyttet vi den nederste og største skiven til riktig plass på høyre søyle ved hjelp av ett flytt, dvs.  $H_1 = 1$ .
3. Så flyttet vi de 2 minste skivene, dvs. vi flyttet  $n - 1 = 2$  skiver fra den midterste søylen til riktig plass på høyre søyle ved å bruke venstre som hjelpesøyle. Fordi vi flyttet  $n - 1$  brikker blir antall flytt  $H_{n-1}$ .

1. Først fjernet vi de to skivene som lå oppå den nederste og største skiven, dvs. vi flyttet  $n - 1 = 2$  skiver til den midterste søyle ved å bruke søylen til høyre søyle som hjelpesøyle. Fordi vi flyttet  $n - 1$  skiver blir antall flytt  $H_{n-1}$ .
2. Deretter flyttet vi den nederste og største skiven til riktig plass på høyre søyle ved hjelp av ett flytt, dvs.  $H_1 = 1$ .
3. Så flyttet vi de 2 minste skivene, dvs. vi flyttet  $n - 1 = 2$  skiver fra den midterste søylen til riktig plass på høyre søyle ved å bruke venstre som hjelpesøyle. Fordi vi flyttet  $n - 1$  brikker blir antall flytt  $H_{n-1}$ .

Ved å summere antall flytt i trinnene 1, 2 og 3 får vi en formel for beregning av det minste antall flytt som kreves for å løse oppgaven med  $n$  antall skiver.

$$H_n = H_{n-1} + 1 + H_{n-1} = 2H_{n-1} + 1. \quad (1.2)$$



$$H_n = H_{n-1} + 1 + H_{n-1} = 2H_{n-1} + 1. \quad (1.2)$$

Å flytte null skiver tar selvfølgelig 0 trekk,  $H_0 = 0$ . Dermed får vi

$$H_1 = 2H_0 + 1 = 2 \cdot 0 + 1 = 1$$

$$H_2 = 2H_1 + 1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$$

$$H_3 = 2H_2 + 1 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$$

$$H_4 = 2H_3 + 1 = 2 \cdot 7 + 1 = 15$$

$$H_5 = 2H_4 + 1 = 2 \cdot 15 + 1 = 31$$

Legg merke til at hver beregning baserer seg på den foregående. Skal vi beregne  $H_{64}$ , dvs. det antall flytt som kreves for å flytte 64 skiver fra en søyle til en annen, må vi utføre 64 utregninger. Det er unektelig litt tungvint. Ser vi derimot nærmere på svarene, ser vi at de følger et mønster:

$$H_0 = 0 = 1 - 1 = 2^0 - 1$$

$$H_1 = 1 = 2 - 1 = 2^1 - 1$$

$$H_2 = 3 = 4 - 1 = 2^2 - 1$$

$$H_3 = 7 = 8 - 1 = 2^3 - 1$$

$$H_4 = 15 = 16 - 1 = 2^4 - 1$$

$$H_5 = 31 = 32 - 1 = 2^5 - 1$$

Det gir oss formelen

$$H_n = 2^n - 1. \tag{1.3}$$

Vi har nå fått en formel der vi kan regne ut antall trekk direkte. Setter vi  $n = 64$  kan vi beregne det minste antall flytt som kreves for løse munkenes oppgave.

$$H_{64} = 2^{64} - 1 = 18.46.744.073.709.551.615. \tag{1.4}$$

Det er derfor ingen grunn til å bekymre seg om verdens undergang riktig ennå, for selv om munkene er i stand til å flytte en skive per sekund og alltid gjør det smarteste trekket, vil hele operasjonen ta  $2^{64} - 1$  sekunder eller 585 milliarder år som er omtrent 42 ganger Universets nåværende alder!