

i Eksamensinformasjon

Fakultet: Teknologi, kunst og design

Utdanning: Teknologiske fag

Eksamen i: Diskret matematikk, DAPE1300

Faglærer: Eva Hadler Vihovde

Fredag 29. november

Eksamenstid: 9:00 - 12:00

Tillatte hjelpemidler: Håndholdt kalkulator som ikke kommuniserer trådløst og som ikke kan regne symbolsk. Dersom kalkulatoren har mulighet for lagring i internminnet skal minnet være slettet før eksamen. Stikkprøver kan foretas. Ingen andre hjelpemidler er tillatt, men du har tilgang til et digitalt vedlegg som følger med denne oppgaven.

- Oppgavesettet består av mange deloppgaver. Mange av disse er trukket ut blant flere ulike varianter. Dette betyr at eksamenskandidatene får forskjellige oppgavesett som inneholder samme type deloppgaver av tilsvarende vanskelighetsgrad, men de ulike deloppgavene kan være forskjellige.
- Bruk penn og papir til å gjøre utregningene. Disse arkene skal imidlertid IKKE leveres inn. Du skal kun skrive inn de svarene du blir bedt om i hver enkelt oppgave, men du vil trenge penn og papir til å gjøre nødvendige utregninger for å komme frem til svarere.
- Mange av deloppgavene er flervalgsoppgaver. Løs oppgaven selv først, og sjekk deretter om svaret du har kommet frem til finnes blant alternativene. Å sjekke alle svaralternativene kan være tidkrevende, og du risikerer da å ikke bli ferdig med alle deloppgavene før eksamenstiden er ute.
- Hvis det er oppgaver du ikke får til med en gang, kan du flagge dem. Fortsett så på de neste oppgavene og gå deretter tilbake til de du har flagget.

1 Ny oppgave

Gitt differensligningen

$$a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}, \quad n \geq 2, \quad a_0 = 0, \quad a_1 = 1$$

Finn først a_2 og deretter a_3 .

Skriv inn a_3 :

$$a_3 = \boxed{}$$

Bestem det karakteristiske polynomet og finn røttene r_1 og r_2 .

Skriv inn summen av røttene:

$$r_1 + r_2 = \boxed{}$$

Den generelle løsningen av differensligningen er

$$a_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$$

Bruk den generelle løsningen, sammen med r_1 , r_2 , a_0 og a_1 , til å sette opp et ligningssett med to ligninger. Bruk så ligningssettet til å finne α og β .

Skriv inn produktet av α og β :

$$\alpha \cdot \beta = \boxed{}$$

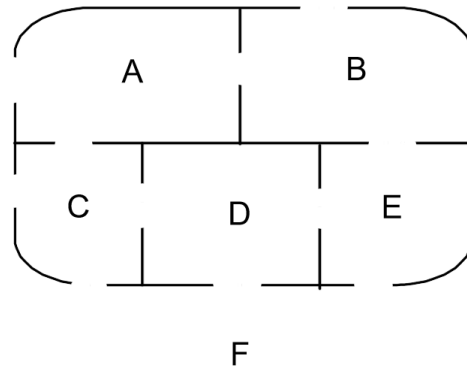
Bestem formelen for a_n . Bruk formelen til å beregne a_3 , og sjekk at du får samme svare som du fikk da du brukte differensligningen. Beregn deretter a_{10} .

Skriv inn a_{10} :

$$a_{10} = \boxed{}$$

Maks poeng: 4

2 Kopi av Ny oppgave



Figuren over viser rommene i et hus. Det er fem rom med navn A, B, C, D og E. I hvert rom er det et antall dører (markert på figuren med åpninger). For eksempel er det tre dører i rom A. Noen dører går ut av huset (til F) og noen går til andre rom.

Er det mulig å gå en tur gjennom huset der alle dørene (både innerdører og ytterdører) passerer én og kun én gang?

Hvis turen krever at du starter og slutter på samme sted finnes det en lukket Euler-vei.

Hvis turen krever at du starter og slutter på forskjellige steder finnes det en åpen Euler-vei.

Tips: For å løse oppgaven bør du tegne en Euler-graf over huset.

Hva har du kommet frem til?

Velg ett alternativ:

- ☐ Det finnes en lukket Euler-vei.
- ☐ Det finnes både en lukket og en åpen Euler-vei.
- ☐ Det finnes verken en lukket eller en åpen Euler-vei.
- ☐ Det finnes en åpen Euler-vei.

Maks poeng: 1

3 Ny oppgave

Hvilke lover har hvilke navn?

	Kommutativ lov	De Morgans lov	Distributive lov	Assosiativ lov
$\neg (p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$	☐	☐	☐	☐
$p \vee q = q \vee p$	☐	☐	☐	☐
$p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	☐	☐	☐	☐
$(p \wedge q) \wedge r = p \wedge (q \wedge r)$	☐	☐	☐	☐

Maks poeng: 4

4 Ny oppgave

Gitt utsagnene p og q :

p : "Det blåser ."

q : "Det er kaldt. "

Hvilket av følgende utsagn tilsvarer setningen:

"Det er kaldt bare hvis det blåser."

Velg ett alternativ:

- ☐ $p \rightarrow q$
- ☐ $\neg q \rightarrow \neg p$
- ☐ $q \rightarrow p$
- ☐ $p \leftrightarrow q$

Maks poeng: 1

5 Ny oppgave

Gitt følgende utsagnsfunksjoner:

$$P(x) = \{x \mid x \text{ har utdannelse}\}$$

$$Q(x) = \{x \mid x \text{ får jobb}\}$$

Følgende setning skal uttrykkes ved hjelp av $P(x)$, $Q(x)$, logiske operatorer og eventuelle kvantorer:

"Ola får jobb bare hvis han har utdannelse."

Hvilket av utsagnene nedenfor tilsvarer setningen over:

Velg ett alternativ:

- ☐ $\forall x | Q(Ola) \rightarrow P(Ola)$
- ☐ $P(Ola) \rightarrow Q(Ola)$
- ☐ $\exists x | Q(Ola) \rightarrow P(Ola)$
- ☐ $\forall x | P(Ola) \rightarrow Q(Ola)$
- ☐ $Q(Ola) \rightarrow P(Ola)$
- ☐ $\exists x | P(Ola) \rightarrow Q(Ola)$

Maks poeng: 1

6 Ny oppgave

Gitt mengdene $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$ og $C = \{3, 4, 5\}$.

Hvilken av følgende mengder tilsvarer mengden $(A \cup C) - B$?

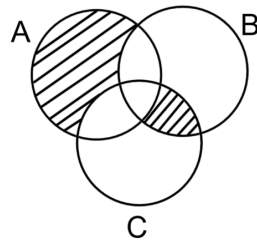
Velg ett alternativ:

- ☐ $\{1, 5\}$
- ☐ $\{1, 2\}$
- ☐ $\{4, 5\}$
- ☐ $\{2, 3\}$
- ☐ $\{3, 4\}$
- ☐ $\{2, 4, 5\}$
- ☐ $\{1, 2, 3, 4, 5, \}$

Maks poeng: 1

7 Ny oppgave

Hvilken av de følgende mengdene tilsvare de skravede områdene i venndiagrammet?



Velg ett alternativ:

- ☐ $(A \cup B) \cup ((B \cap C) - B)$
- ☐ $(A \cup B) - ((A \cap B) - C)$
- ☐ $(C - (A \cup B)) \cup (A \cap B)$
- ☐ $(A - (B \cup C)) \cup ((B \cap C) - A)$

Maks poeng: 1

8 Ny oppgave

Gitt følgende uttrykk:

$$x \equiv y \pmod{z}$$

At x er kongruent med y modulo z innebærer at

Velg ett alternativ:

- ☐ x , y og z er tre ledd i samme rekursivt definerte tallfølge.
- ☐ x , y og z er tre ledd i samme aritmetiske tallfølge.
- ☐ x , y og z er tre ledd i samme geometriske tallfølge.
- ☐ x og y er ledd i samme geometriske tallfølge der forholdet mellom et vilkårlig ledd og det foregående er z .
- ☐ x og y er ledd i samme aritmetiske tallfølge med differansen z mellom leddene.

Maks poeng: 1

9 Ny oppgave

Hvilket av følgende uttrykk er IKKE en funksjon fra $\mathbb{R}$ til $\mathbb{R}$?

Velg ett alternativ:

- ☐ $f(x) = \frac{x}{2}$
- ☐ $f(x) = x^2 + 1$
- ☐ $f(x) = \pm\sqrt{x^2 + 1}$
- ☐ $f(x) = x^3 + 1$

Maks poeng: 1

10 Ny oppgave - a

La mengden N være de naturlige tallene, dvs. $N = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

La funksjonen $f : N \rightarrow N$ være definert ved $f(x) = (x \bmod 3) + (x \bmod 7)$

Bestem

$$f(0) = \boxed{}$$

$$f(4) = \boxed{}$$

$$f(10) = \boxed{}$$

$$f(12) = \boxed{}$$

NB! Oppgaven fortsetter i neste deloppgave...

Maks poeng: 4

11 b

(Denne oppgaven er en fortsettelse av forrige oppgave.)

La mengden N være de naturlige tallene, dvs. $N = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

La funksjonen $f : N \rightarrow N$ være definert ved $f(x) = (x \bmod 3) + (x \bmod 7)$

Finnes det en verdi for x slik at $f(x) = 9$?

Hvis svaret er "ja", skal du skrive inn den laveste verdien for x slik at $f(x) = 9$.

Hvis svaret er "nei" skal du skrive inn -1. $x = \boxed{}$

Finnes det en verdi for x slik at $f(x) = 8$?

Hvis svaret er "ja", skal du skrive inn den laveste verdien for x slik at $f(x) = 8$.

Hvis svaret er "nei" skal du skrive inn -1. $x = \boxed{}$

NB! Oppgaven fortsetter i neste deloppgave...

Maks poeng: 2

12 **C**

(Denne oppgaven er en fortsettelse av de to foregående oppgavene og du skal bruke resultatene derfra for å komme frem til svaret på denne oppgaven.)

La mengden N være de naturlige tallene, dvs. $N = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

La funksjonen $f : N \rightarrow N$ være definert ved $f(x) = (x \bmod 3) + (x \bmod 7)$

Velg ett alternativ:

Velg ett alternativ:

- ☐ f er både *på* og *en-til-en*.
- ☐ f er ikke *på* men f er *en-til-en*.
- ☐ f er *på* men er ikke *en-til-en*.
- ☐ f er ikke *på* og f heller *ikke en-til-en*.

Maks poeng: 1

13 Ny oppgave

Nedenfor ser du de første radene i Pascals trekant:

$$\begin{array}{c}
 \binom{0}{0} \\
 \binom{1}{0} \quad \binom{1}{1} \\
 \binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2} \\
 \binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3} \\
 \binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}
 \end{array}$$

Sett opp den neste raden i Pascals trekant og

skriv inn summen av alle elementene på denne raden:

Summen av elementene på én rad øker for hver rad.

Kan du se hvilket mønster økningen følger?

Hva blir summen av elementene på raden som starter med $\binom{10}{0}$?

Svar:

Maks poeng: 2

14 Ny oppgave

Gitt binomialteoremet:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

Bruk dette til å bestemme hvilken koeffisient, $\binom{n}{k}$, som skal stå foran $x^3 y^5$ i polynomet $(x+y)^8$.

Verdien av koeffisienten $\binom{n}{k}$ er

Maks poeng: 1

15 Ny oppgave

Tidligere i høst ble VM i Fischer-sjakk arrangert i Reykjavik på Island, der Magnus Carlsen endte på tredje plass.

Fischer-sjakk er en variant av sjakk der de åtte offiserene (1 konge, 1 dronning, 2 løpere, 2 springere og 2 tårn) plasseres tilfeldig på først/siste rad ved spillets begynnelse. (Første og siste rad vil alltid være speilvendt i forhold til hverandre).



a) På hvor mange ulike måter kan offiserene stilles opp på første rad? .

Første rad har fire hvite og fire svarte felt. I Fischer-sjakk er det imidlertid et krav om at de to løperne må stå på felt av forskjellig farge og da blir antall muligheter betydelig redusert. For å finne ut hvor mange ulike måter offiserene kan stilles opp på første rad når vi tar hensyn til dette kravet, skal vi dele oppgaven inn i mindre deler der vi plasserer en brikke type ad gangen på brettet. Vi starter med løperne:

b) Hvor mange muligheter har vi til å plassere de **to løperne** på første rad når de skal stå på felt av **forskjellig farge** (og det ikke står noen brikker der fra før)?

c) Når vi har plassert de to løperne er turen kommet til å plassere de **to tårnene**. På hvor mange måter kan de plasseres på første rad når det allerede står to løpere der?

d) På hvor mange måter er det mulig å plassere de **to springerne** på første rad når det allerede står to løpere og to tårn der?

e) På hvor mange måter kan vi plassere **kongen** på første rad etter at løperne, tårnene og springerne er plassert der?

f) På hvor mange måter kan vi plassere **dronningen** på første rad etter at alle de andre offiserene er plassert der?

g) Ut fra beregningene gjort under punktene b), c), d), e) og f) kan vi nå beregne hvor mange muligheter vi har til å plassere offiserene på brettets første rad, når vi samtidig tar hensyn til at løperne må stå på felt av forskjellig farge. Hva blir svaret?

h) Fischer-sjakk har imidlertid et krav til som må oppfylles: **Kongen må stå mellom de to tårnene.** Hvor mange muligheter får vi nå?

NB! Tårnene og kongen trenger ikke å stå inntil hverandre!

Maks poeng: 8

16 Ny oppgave

Gitt mengden $A = \{4, 5, 6, 7, 8\}$ og relasjonen R på A der

$$R = \{(a, b) \mid \gcd(a, b) \neq 1\}$$

Hvilken av følgende mengder tilsvare R ?

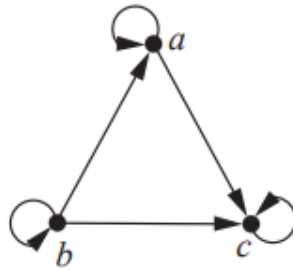
Velg ett alternativ:

- ☐ $\{(4, 5), (4, 6), (4, 7), (4, 8), (5, 6), (5, 7), (5, 8), (6, 7), (6, 8), (7, 8)\}$
- ☐ $\{(4, 4), (4, 5), (4, 6), (4, 7), (4, 8), (5, 5), (5, 6), (5, 7), (5, 8), (6, 6), (6, 7), (6, 8), (7, 7), (7, 8), (8, 8)\}$
- ☐ $\{(4, 5), (4, 7), (5, 4), (5, 6), (5, 7), (5, 8), (6, 5), (6, 7), (7, 4), (7, 5), (7, 6), (7, 8), (8, 5), (8, 7)\}$
- ☐ $\{(4, 4), (4, 6), (4, 8), (5, 5), (6, 4), (6, 6), (6, 8), (7, 7), (8, 4), (8, 6), (8, 8)\}$

Maks poeng: 1

17 Ny oppgave

Gitt mengden $A = \{a, b, c\}$ og relasjonen R på A der R er gitt ved grafen



Hvilke egenskaper har R og hva slags type relasjon er den?

Velg en eller flere av alternativene under.

Velg ett eller flere alternativer

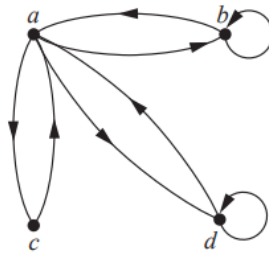
- ☐ R er symmetrisk
- ☐ R er transitiv
- ☐ R er antisymmetrisk
- ☐ R er en partiell ordning
- ☐ R er en ekvivalensrelasjon
- ☐ R er refleksiv

NB! Du får fratrekk for feil svar, men du kan ikke få mindre enn null poeng.

Maks poeng: 4

18 Ny oppgave

Gitt mengden $A = \{a, b, c, d\}$ og relasjonen R på A der R er gitt ved grafen



Hvilke egenskaper har R og hva slags type relasjon er den?

Velg en eller flere av alternativene under.

Velg ett eller flere alternativer

- ☐ R er en ekvivalensrelasjon
- ☐ R er transitiv
- ☐ R er refleksiv
- ☐ R er en partiell ordning
- ☐ R er antisymmetrisk
- ☐ R er symmetrisk

NB! Du får fratrekk for feil svar, men du kan ikke få mindre enn null poeng.

Maks poeng: 4

19 Ny oppgave

Gitt mengden $A = \{a, b, c, d\}$ og relasjonen R på A gitt ved matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Hvilke egenskaper har R og hva slags type relasjon er den?
Velg en eller flere av alternativene under.

Velg ett eller flere alternativer

- ☐ R er refleksiv
- ☐ R er en ekvivalensrelasjon
- ☐ R er antisymmetrisk
- ☐ R er symmetrisk
- ☐ R er transitiv
- ☐ R er en partiell ordning

NB! Du får fratrekk for feil svar, men du kan ikke få mindre enn null poeng.

Maks poeng: 4

20 Ny oppgave

Gitt mengden $A = \{a, b, c, d\}$ og relasjonen R på A gitt ved matrisen

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Hvilke egenskaper har R og hva slags type relasjon er den?
Velg en eller flere av alternativene under.

Velg ett eller flere alternativer

- ☐ R er antisymmetrisk
- ☐ R er refleksiv
- ☐ R er en ekvivalensrelasjon
- ☐ R er en partiell ordning
- ☐ R er symmetrisk
- ☐ R er transitiv

NB! Du får fratrekk for feil svar, men du kan ikke få mindre enn null poeng.

Maks poeng: 4

