

Største felles divisor. (eng: greatest common divisor)

La a og b være to tall der **ikke** begge er 0. Største felles divisor (eller faktor) for a og b er det største heltallet som går opp i både a og b . Dette betegnes ofte med $\gcd(a, b)$. OBS! $\gcd(a, b)$ er alltid et positivt tall!

Største felles divisor (gcd) ved hjelp av primtallsfaktorisering.

Finn primtallsfaktoriseringen til a og b .

Da vil $\gcd(a, b)$ være *produktet av de primtallsfaktorene som går opp i både a og b .*

Hvis et primtall p forekommer m ganger i a og n ganger i b , så tas det med så mange ganger som det minste tallet av m og n , dvs. vi velger laveste potens av p .

Eksempel 1

$$a = 12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$$

$$b = 15 = 3 \cdot 5$$

$$\gcd(a, b) = \gcd(12, 15) = 3$$

Eksempel 2

$$a = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^3 \cdot 11$$

$$b = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$$

$$\gcd(a, b) = 2 \cdot 3 \cdot 7$$

Eksempel 3

$$a = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$$

$$b = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7^3$$

$$\gcd(a, b) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$$

gcd ved hjelp av Euklids algoritme:

Husk definisjonen av kvotient og rest:

Hvis a og b er til hele tall med $b > 0$, så finnes entydige hele tall slik at

$$a = q \cdot b + r, \quad 0 \leq r < b$$

Setning

La $b > 0$. Da er $\gcd(a, b) = \gcd(b, r)$.

Bevis

La c være et tall som går opp i både a og b .

For å vise at $\gcd(a, b) = \gcd(b, r)$ må vi vise at c også er faktor i r .

La $\gcd(a, b) = c$ være det største heltallet som går opp i både a og b . Det betyr at $a = c \cdot x$ og $b = c \cdot y$.

Vi har $a = q \cdot b + r$ som er lik $r = a - q \cdot b$.

Vi setter så inn $c \cdot x$ for a og $c \cdot y$ for b og får da:

$$r = c \cdot x - q \cdot c \cdot y = c(x - q \cdot y).$$

Vi ser at c er faktor i r , dvs. c går opp i r , og dermed er det bevist.

Eksempel på bruk av skjema for Euklids algoritme

a slettes til b
b slettes til r

a	b	r
42	18	6
18	6	0

$42 \bmod 18 = 6$
 $18 \bmod 6 = 0$
 stopper når $r = 0$

$\gcd(42, 18)$

$$\gcd(42, 18) = 6.$$

Euklids algoritme er basert på at $\gcd(a, b) = \gcd(b, r)$.

Med primtallsfaktorisering:

$$42 = 2 \cdot 3 \cdot 7, 18 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \quad \gcd(42, 18) = 2 \cdot 3 = 6$$

Tilsvarende java-metode:

```
public static int gcd( int a, int b)
{
    while( b > 0)
    {
        int r = a % b;
        a = b;
        b = r;
    }
    return a;
}
```

(NB! Her går vi ut av løkka når $b = 0$. Da har allerede a har blitt tilordnet b og b er tilordnet r som er null. Derfor returnerer vi a .)