Utvidelser av relasjoner - tillukninger

Hvis en relasjon R på en mengde A ikke er refleksiv, symmetrisk eller transitiv, kan den utvides til å bli henholdsvis refleksiv, symmetrisk eller transitiv ved å legge til nødvendige verdipar for å oppnå egenskapen.

1) Den minste mulige utvidelsen som gjør relasjonen R refleksiv kalles *den refleksive tillukningen*.
   Den blir refleksiv ved å ta med de parene som mangler, dvs. parene med lik første og andrekoordinat, f.eks.
   (a, a), (b, b), (c, c) osv.

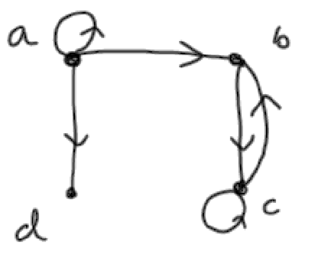
2) Den minste mulige utvidelsen som gjør relasjonen R symmetrisk kalles *den symmetriske tillukningen*.
   Den blir symmetrisk ved å ta med de parene som mangler, dvs. hvis paret (a, b) ∈ R, må man legge til
   (b, a) (hvis paret ikke allerede er med).

3) Den minste mulige utvidelsen som gjør relasjonen R transitiv kalles *den transitive tillukningen*.
   Den blir transitiv ved å ta med de parene som mangler, dvs. hvis parene (a, b) ∈ R og (b, c) ∈ R, må man legge til paret (a, c) (hvis paret ikke allerede er med).

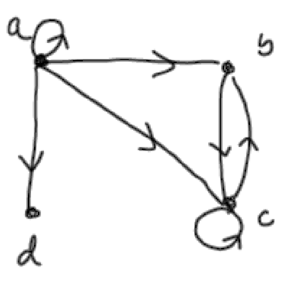
Eksempel på transitiv tillukning av en relasjon.

La A = {a, b, c, d} og R = {(a, a), (a, b), (a, d), (b, c), (c, b), (c, c)}

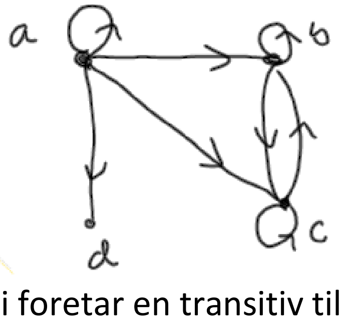
Grafen G_R:



vi må ha med (a,c) $\longrightarrow$



vi må ha med (b,b) $\longrightarrow$



$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Denne er transitiv.

Vi foretar en transitiv tillukning ved å legge til verdiparene (a, c) og (b, b).

Formel

La M_R være matrisen til R. Anta at M_R er en *nxn*-matrise.
Da vil matrisen

$$M_R \vee {M_R}^{[2]} \vee {M_R}^{[3]} \vee \ldots \ldots . \vee {M_R}^{[n]}$$

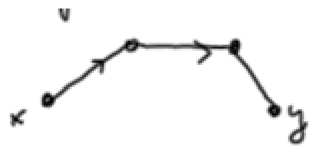
være matrisen til den *transitive tillukningen til R.*

<u>Begrunnelse:</u>

${M_R}^{[2]}$ inneholder de parene (x, y) der det går en vei med lengde 2 fra x til y, dvs. slik:

men der (x, y) er med:

Derfor $M_R \vee {M_R}^{[2]}$.
${M_R}^{[3]}$ inneholder parene (x, y) der det går en vei med lengde 3 fra x til y, dvs. slik:



men da må vi ha med

og dermed:

Med andre ord må (x, y) være med.
Derfor
$M_R \vee {M_R}^{[2]} \vee {M_R}^{[3]}$ osv.