

Utvidelser av relasjoner - tillukninger

Hvis en relasjon R på en mengde A ikke er refleksiv, symmetrisk eller transitiv, kan den utvides til å bli henholdsvis refleksiv, symmetrisk eller transitiv ved å legge til nødvendige verdipar for å oppnå egenskapen.

- 1) Den minste mulige utvidelsen som gjør relasjonen R refleksiv kalles *den refleksive tillukningen*.

Den blir refleksiv ved å ta med de parene som mangler, dvs. parene med lik første og andrekoordinat, f.eks.

$(a, a), (b, b), (c, c)$ osv.

- 2) Den minste mulige utvidelsen som gjør relasjonen R symmetrisk kalles *den symmetriske tillukningen*.

Den blir symmetrisk ved å ta med de parene som mangler, dvs. hvis paret $(a, b) \in R$, må man legge til (b, a) (hvis paret ikke allerede er med).

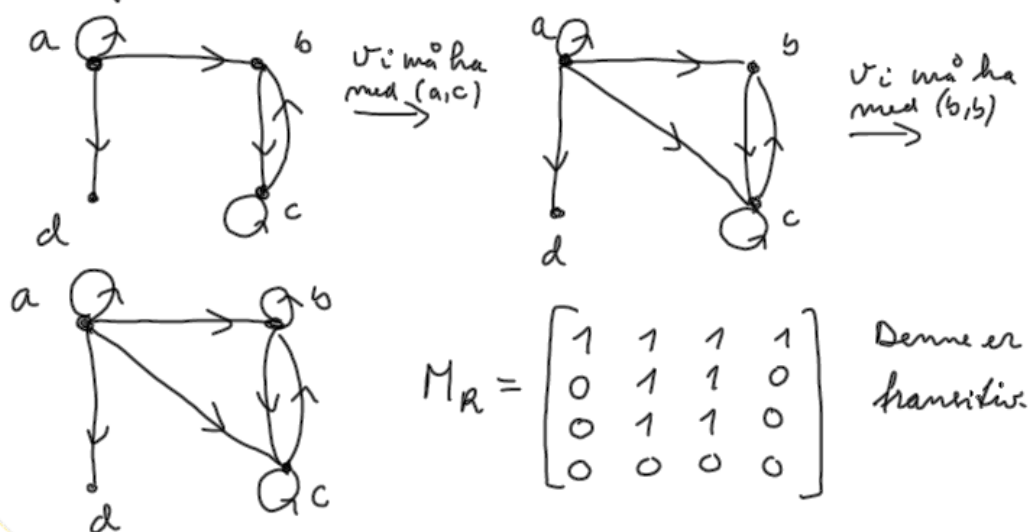
- 3) Den minste mulige utvidelsen som gjør relasjonen R transitiv kalles *den transitive tillukningen*.

Den blir transitiv ved å ta med de parene som mangler, dvs. hvis parene $(a, b) \in R$ og $(b, c) \in R$, må man legge til paret (hvis paret ikke allerede er med).

Eksempel på transitiv tillukning av en relasjon.

La $A = \{a, b, c, d\}$ og $R = \{(a, a), (a, b), (a, d), (b, c), (c, b), (c, c)\}$

Grafen G_R :



Vi foretar en transitiv tillukning ved å legge til verdiparene (a, c) og (b, b) .

Formel

La M_R være matrisen til R . Anta at M_R er en $n \times n$ -matrise.

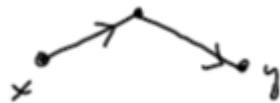
Da vil matrisen

$$M_R \vee M_R^{[2]} \vee M_R^{[3]} \vee \dots \vee M_R^{[n]}$$

være matrisen til den *transitive tillukningen* til R .

Begrunnelse:

$M_R^{[2]}$ inneholder de parene (x, y) der det går en vei med lengde 2 fra x til y , dvs. slik:

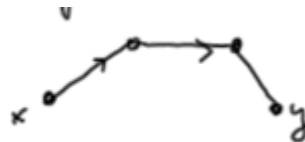


men der (x, y) er med:



Derfor $M_R \vee M_R^{[2]}$.

$M_R^{[3]}$ inneholder parene (x, y) der det går en vei med lengde 3 fra x til y , dvs. slik:



men da må vi ha med



og dermed:



Med andre ord må (x, y) være med.

Derfor

$$M_R \vee M_R^{[2]} \vee M_R^{[3]} \text{ osv.}$$