

Utsagnslogikk.

Et **utsagn** (eng: proposition) er en erklærende setning som enten er **sann** eller **usann**. Vi kaller det gjerne en **påstand**.

Eksempler:

Avgjør om følgende setninger er et utsagn, og i så fall; avgjør sannhetsverdien av det:

- | | |
|-------------------------------|---|
| 1. Oslo er Norges største by. | Ja, sant |
| 2. Trikken er aldri i rute. | Ja, usant |
| 3. $1+1 = 2$ | Ja, sant |
| 4. $1+1=5$ | Ja, usant |
| 5. Hvor mye er klokka? | Nei - spørsmål |
| 6. $x + 1 = 2$ | Nei - likning |
| 7. I dag er det dårlig vær | Ja, hvis begrepet «dårlig vær» er definert. |

Symbolbruk

Vi bruker vanligvis bokstavene $p, q, r, \dots$ til å betegne utsagn. Vi bruker de store bokstavene S for *sant* og U for *usant*. På engelsk får vi T for *true* og F for *false*.

Logiske operatorer (eng: connectives)

Vi kan lage sammensatte utsagn ved hjelp at logiske operatorer.

Negasjon

La p være et utsagn. Negasjonen til p betegnes som

$\neg p$

og leses som «*det er ikke slik at p* » eller «*ikke p* » (eng. «not p ») Symbolet $\neg$ kalles ikke-tegnet eller negasjonstegnet.

Sannhetsverditabell:

p	$\neg p$
s	u
u	s

OBS: $\neg\neg p = p$

Eksempel

La p være utsagnet «2 er større enn 1». Da blir

$\neg p$

det samme som «det er ikke slik at 2 er større enn 1».

Vi ser at p er sann, og at $\neg p$ er usann.

NB! $\neg p$ betyr at «2 er mindre eller lik 1», IKKE at «2 er mindre enn 1».

Logisk og

La p og q være to utsagn. Utsagnet

$p \wedge q$

leses som « p og q » og er sant kun hvis både p og q er sanne. Hvis en av dem er usanne er utsagnet usant. Dette kalles også for *konjunksjonen* til p og q .

Sannhetsverditabell:

p	q	$p \wedge q$
s	s	s
s	u	u
u	s	u
u	u	u

Operatoren $\wedge$ er kommutativ, dvs.

$$p \wedge q = q \wedge p$$

Eksempel

p : «2 er mindre enn 3»

q : «1 er større enn 2»

$p \wedge q$ kan leses som «2 er mindre enn 3 **og** 1 er større enn 2».

$p \wedge q$ blir usann fordi p er sann og q er usann.

Logisk eller

La p og q være to utsagn. Utsagnet

$$p \vee q$$

leses som « p eller q » og er sant hvis minst én av dem er sanne, og er usant hvis begge er usanne. Dette kalles også for *disjunksjonen* til p og q .

Sannhetsverditabell:

p	q	$p \vee q$
S	S	S
S	U	S
U	S	S
U	U	U

Operatoren $\vee$ er kommutativ, dvs $p \vee q = q \vee p$.

Eksempel:

p : «2 er mindre enn 3»

q : «1 er større enn 2»

$p \vee q$ kan leses som «2 er mindre enn 3 **eller** 1 er større enn 2».

$p \vee q$ blir sann fordi p er sann og q er usann, dvs. ikke begge er usanne.

Logisk eksklusiv eller

(xeller, eng: xor)

La p og q være to utsagn. Utsagnet

$$p \oplus q$$

leses som « p eksklusive eller q », « p xeller q » eller « p xor q ».

Utsagnet er sant hvis p og q har motsatte sannhetsverdier og usant hvis de har like sannhetsverdier. Dvs. det er sant når **enten** p er sant **eller** q er sant men **ikke** begge deler.

Sannhetsverditabell:

p	q	$p \oplus q$
S	S	U
S	U	S
U	S	S
U	U	U

Operatoren $\oplus$ er kommutativ, dvs $p \oplus q = q \oplus p$.**Ordet «*eller*» brukes i flere måter**Eller (or): $p \vee q$ Enten eller (either or): $p \oplus q$

Verken eller (neither nor):

$$\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$$

Logisk implikasjon

(eng: conditional statement)

La p og q være to utsagn. Utsagnet

$$p \rightarrow q$$

leses som « p impliserer q ».

Pilen kalles for en implikasjons-pil. p kalles for *premissen* og q for *konklusjonen*.

Utsagnet er usant hvis p er sant og q er usant, og er sant ellers.

Sannhetsverditabell:

p	q	$p \rightarrow q$
S	S	S
S	U	U
U	S	S
U	U	S

Huskeregel: «SUSS»

Operatoren er **ikke** kommutativ, dvs.

$$p \rightarrow q \neq q \rightarrow p$$

Utsagnet kan uttrykkes på mange forskjellige måter:

- hvis p , så q
- hvis p , q
- p er tilstrekkelig for q
- q hvis p
- q når p
- en nødvendig betingelse for p er q
- p medfører q
- p bare hvis q
- en tilstrekkelig betingelse for q er p
- q hver gang p
- q er nødvendig for p
- q følger av p
- q med mindre $\neg p$

Eksempler

p: Det blåser.

q: Det er kaldt

- | | |
|---|-------------------|
| 1) Hvis det blåser er det kaldt. | $p \rightarrow q$ |
| 2) Det er kaldt hvis det blåser. | $p \rightarrow q$ |
| 3) Det blåser hvis det er kaldt. | $q \rightarrow p$ |
| 4) Det blåser bare hvis det er kaldt | $p \rightarrow q$ |
| 5) Det er tilstrekkelig at det blåser for at det skal være kaldt. | $p \rightarrow q$ |

NB! Eksempel 4 kan være litt vanskelig å forstå og blir nærmere forklart under avsnittet «bare hvis».

Det omvendte, kontrapositive og inverse utsagnet.La p og q være to utsagn, og $p \rightarrow q$

1) Utsagnet $q \rightarrow p$ kalles det omvendte utsagnet til $p \rightarrow q$.

2) Utsagnet $\neg q \rightarrow \neg p$ kalles det kontrapositive utsagnet til $p \rightarrow q$.

3) Utsagnet $\neg p \rightarrow \neg q$ kalles det inverse utsagnet til $p \rightarrow q$.

Påstand:

Utsagnet

$$p \rightarrow q \text{ og } \neg q \rightarrow \neg p$$

(det siste er det kontrapositive utsagnet til $p \rightarrow q$) har *nøyaktig samme sannhetsinnhold*. Vi kan bevise dette ved hjelp av en sannhetsverditabell:

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \rightarrow q$	$\neg q \rightarrow \neg p$
S	S	V	V	S	S
S	V	V	S	V	V
V	S	S	V	S	S
V	V	S	S	S	S



Vi ser at de to kolonnene lengst til høyre er like.

Siden de har samme sannhetsverdier er utsagnene logisk ekvivalente dvs. de er logisk like.

Begrepene «tilstrekkelig», «nødvendig» og «bare hvis».

Tilstrekkelig:

La p og q være to utsagn. Det at p er *tilstrekkelig for* q betyr at det holder at p er sann for at q skal være sann. Hvis p er usann sier det ingen ting om hva q er. Det tilsvarer $p \rightarrow q$.

Nødvendig:

La p og q være to utsagn. Det at p er *nødvendig for* q betyr at p MÅ være sann for at q skal være sann. Med andre ord; hvis p er usann, så er q garantert usann. Dette svarer til

$$\neg p \rightarrow \neg q$$

og til det kontrapositive utsagnet til $q \rightarrow p$.

NB! Implikasjonspilen går FRA q TIL p !

Eksempel

Opptakskravet til Bachelor i informasjonsteknologi er generell studiekompetanse + R1 (eller S1 og S2). La utsagnet p være at du oppfyller dette kravet og q at du blir tatt opp. Da er p nødvendig for q . Med andre ord; hvis du ikke oppfyller opptakskravet ($\neg p$) blir du ikke tatt opp ($\neg q$). Dette kan oversettes til $\neg p \rightarrow \neg q$ som er det kontrapositive utsagnet (og ekvivalent til) $q \rightarrow p$. Utsagnet $q \rightarrow p$ kan igjen oversettes til at *hvis du blir tatt opp, så oppfyller du opptakskravet*.

NB! I dette eksempelet er p *nødvendig for* q men *ikke tilstrekkelig*. Vanligvis er det også en poenggrense. Det betyr at selv om man oppfyller opptakskravet, kan en ha for få poeng til å bli tatt opp.

Bare hvis:

La p og q være to utsagn. Utsagnet « p hvis q » betyr $q \rightarrow p$ siden q er premissen (det som står etter hvis). Men hvordan skal vi tolke « p bare hvis q »? Det betyr at p er sann bare hvis q er sann, med andre ord; hvis q er usann så er p usann. Det siste svarer til

$\neg q \rightarrow \neg p$ og ved kontraposisjon er lik $p \rightarrow q$.

Oppsummering.

p tilstrekkelig for q :	$p \rightarrow q$.
p nødvendig for q :	$q \rightarrow p$.
p hvis q :	$q \rightarrow p$.
p bare hvis q :	$p \rightarrow q$.

Logisk biimplikasjon eller dobbeltimplikasjon.

La p og q være to utsagn. Utsagnet $p \leftrightarrow q$ kalles for en *dobbeltimplikasjon* eller en *biimplikasjon* (eng. a biconditional statement) og leses som « p hvis og bare hvis q ». (eng: « p if and only if q »). Utsagnet er sant når p og q har samme sannhetsverdier og usant når de har forskjellige sannhetsverdier.

Sannhetsverditabell:

p	q	$p \leftrightarrow q$
S	S	S
S	U	U
U	S	U
U	U	S

Operatoren $\leftrightarrow$ er kommutativ, dvs.

$p \leftrightarrow q$ er logisk lik $q \leftrightarrow p$.

$P \leftrightarrow q$ uttrykkes på flere måter:

- p er nødvendig og tilstrekkelig for q
- p impliserer q og q impliserer p
- hvis p så q og omvendt
- p hviss q (hvis er en forkortelse for hvis og bare hvis)
- p iff q (iff er en forkortelse for if and only if)

$p \leftrightarrow q$ er logisk ekvivalent med $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

Oppgaver.

Bruk sannhetsverditabell til å vise at følgende uttrykk er logisk like:

- $p \leftrightarrow q$ logisk lik $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$?
- $p \leftrightarrow q$ logisk lik $\neg (p \oplus q)$?
- $p \rightarrow q$ logisk lik $\neg p \vee q$?

$p \leftrightarrow q$ er logisk ekvivalent med $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

Antall rader i en sannhetsverditabell

Anta at vi har n forskjellige utsagn ($p, q, r, s, \dots$) i et sammensatt utsagn. Da må tabellen inneholde 2^n rader i tillegg til overskriftsraden. Grunntallet er 2 fordi et logisk utsagn kan kun ha 2 ulike verdier, sann eller usann (true eller false).

Fra språk til matematikk:

Eksempel 1

«Du kan som student få tilgang til internett på skolen bare hvis du er datastudent eller du ikke går i første klasse.»

Vi kan trekke ut tre enkeltutsagn av setningen:

p : «du kan som student for tilgang til internett på skolen»

q : «du er datastudent»

r : «du går i første klasse»

Da kan setningen over oversettes til:

« p bare hvis (q eller ikke r)»

Eller med symboler:

$$p \rightarrow (q \vee \neg r).$$

Det kontrapositive utsagnet blir:

$$\neg (q \vee \neg r) \rightarrow \neg p$$

som er det samme som (bruker de Morgans lov):

$$(\neg q \wedge r) \rightarrow \neg p$$

som igjen er det samme som:

$$(r \wedge \neg q) \rightarrow \neg p$$

Det siste kan leses som

«Hvis du går i første klasse og ikke er datastudent, så får du ikke tilgang til internett.»

Eksempel 2

«Du kan ikke kjøre berg-og-dalbane hvis du er lavere enn 122 cm med mindre du er over 16 år.»

Trekker tre enkeltutsagn ut av setningen:

p : «du kan kjøre berg-og-dalbane»

q : «du er lavere enn 122 cm»

r : «du er over 16 år»

Setningen kan oversettes til:

«ikke p hvis (q med mindre r)»

Uttrykket «med mindre» kan uttrykkes som «og ikke».

Vi får da:

$$(q \wedge \neg r) \rightarrow \neg p$$

Det kontrapositive utsagnet blir

$\neg \neg p \rightarrow \neg (q \wedge \neg r)$ som videre er lik (bruker de Morgans lov):

$$p \rightarrow (\neg q \vee r)$$

Tilbake til språk igjen får vi da:

«Hvis kan kjøre berg-og-dalbane, er du 122 cm eller høyere eller over 16 år.»

Eksempler på bruk av utsagnlogikk

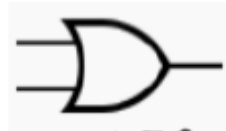
Porter i logiske kretser:



AND

OG

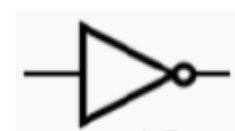
$\wedge$



OR

ELLER

$\vee$

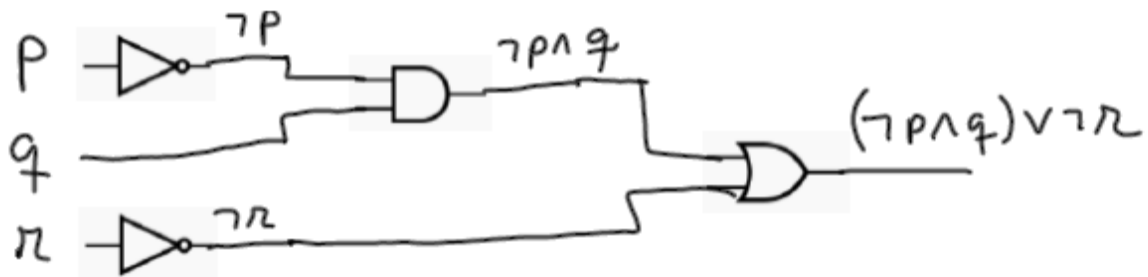


NOT

IKKE

$\neg$

En krets for $(\neg p \wedge q) \vee \neg r$ blir



Logiske operatører i ulike språk

Vanlig språk	ikke	og	eller	enten eller
«	not	and	or	either or (xor)
Logikk	$\neg$	$\wedge$	$\vee$	$\oplus$
Java	!	&&		$\wedge$
PHP	NOT (!)	AND (&&)	OR ()	xor ($\wedge$)

```

public class Eks
{
    public static void main( String ... args)
    {
        boolean p = 3 > 2;    // sant
        boolean q = 1 > 2;    // usant
        boolean r = (p || q) ^ q;
        System.out.println(r); // Hva blir verdien til r?
    }
}

```