

Rekker (eng: *series, summations*)

En rekke er summen av leddene i en følge. Gitt følgen

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots, a_N$$

Da blir den tilsvarende rekken

$$a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots + a_N$$

Bokstaven n er en summasjonsindeks.

Vi kan gjerne bruke andre bokstaver på denne indeksen, f.eks. i, j, k , osv.

Summetegnet $\sum$ - Zigma

Symbolet $\sum$ er et summetegn.

Eksempel

$$\sum_{n=1}^5 n = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$$

Vi finner summen ved å legge sammen leddene vi får når vi setter inn konkrete verdier for n . Når vi setter inn nederste verdien, $n = 1$, får vi første ledd i rekken. Deretter øker vi n til 2 og får andre ledd. Slik fortsetter vi til n er lik den øverste verdien som gir siste ledd, her $n = 5$.

Aritmetiske rekker

Gitt den aritmetiske følgen

$$1, 2, 3, 4, \dots, 100$$

Den tilsvarende aritmetiske rekken blir da

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 100 = ?$$

Hvordan finne summen av en aritmetisk rekke?

Summen av en aritmetisk rekke er lik summen av første og siste ledd ganget med antall og delt på 2:

$$\sum_{n=1}^{100} n = \frac{(1 + 100) \cdot 100}{2} = 101 \cdot 50 = 5050$$

Kort fortalt tar vi gjennomsnittet av første og siste ledd og ganger det med antall ledd i rekken.

Formel for summen av en aritmetisk rekke

La a være første ledd, b siste ledd og n antall ledd. Da er summen gitt ved:

$$\frac{(a + b) \cdot n}{2}$$

For å bruke formelen over trenger vi å vite hvor mange ledd rekken inneholder.

Antall ledd i en aritmetisk rekke.

La a være første ledd, b siste ledd og d den faste differensen mellom et vilkårlig ledd og det foregående leddet i rekken. Da er antall ledd n gitt ved

$$n = \frac{(b-a)}{d} + 1$$

NB! Vi må legge til 1 for å få med begge endepunktene i rekken.

Eksempel 1

Hva blir summen $12 + 17 + 22 + 27 + 32 + 37 + 42$?

Første ledd $a = 12$

Siste ledd $b = 42$

Differensen $d = 5$

Antall ledd $n = \frac{b-a}{d} + 1 = \frac{42-12}{5} + 1 = 7$

$$\text{Summen} = \frac{(a+b) \cdot n}{2} = \frac{(12+42) \cdot 7}{2} = 189$$

Eksempel 2

Hva blir summen $10 + 13 + 16 + 19 + \dots + 91 + 94$?

$a = 10$, $b = 94$, $d = 3$

Antall ledd $n = \frac{94-10}{3} + 1 = 29$

$$\text{Summen} = \frac{(10+94) \cdot 29}{2} = 1508$$

Javakode for eksempel 2.

Bestemmer først summen ved hjelp av formelen og deretter ved hjelp av en for-løkke:

```
// Beregner summen av 10 + 13 + 16 + 19 + 22 + .....+ 94

import javax.swing.*;

class AritmetiskRekke
{
    public static void main(String[] args)
    {
        int a = 10; // Første ledd i rekka
        int b = 94; // Siste ledd i rekka
        int d = 3;  // Differansen mellom et ledd og det foregående

        // Beregner antall elementer i rekka:
        int n = ((b - a)/d) + 1;

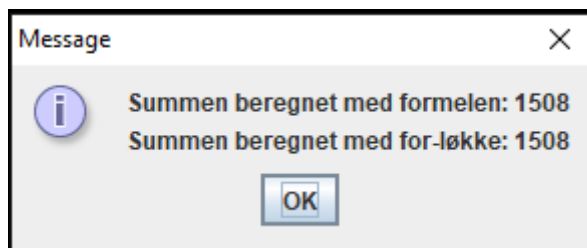
        // Beregner summen ved å bruke formelen:
        int sum1 = ((a + b)*n)/2;

        // Beregner summen ved å bruke løkke:
        int sum2 = 0;

        for(int ledd = a; ledd <= b; ledd += d)
            sum2 += ledd;          // sum2 = sum2 + ledd;

        JOptionPane.showMessageDialog(null,
            "Summen beregnet med formelen: " + sum1 +
            "\nSummen beregnet med for-løkke: " + sum2);
    }
}
```

Utskrift:



Geometriske rekker

Gitt en generell geometrisk følge er gitt ved:

$ar^0, ar^1, ar^2, ar^3, \dots, ar^N$

Den tilsvarende geometriske rekken blir da

$a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^N = \sum_{n=0}^N a \cdot r^n$ Husk! $r^0 = 1$ og $r^1 = r$

Eksempel

Gitt den geometriske rekken:

$$3 + 6 + 12 + 24 + 48 + \dots + 384$$

Vi ser at forholdet mellom et generelt ledd og det foregående er 2, dvs. $r = 2$.

Tallene i rekken kan skrives som

$$3 \cdot 2^0 + 3 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^4 + 3 \cdot 2^5 + 3 \cdot 2^6 + 3 \cdot 2^7$$

Vi ser at indeksen til det siste leddet er 7, dvs. $N = 7$.

Denne indeksen trenger vi å kjenne til for å beregne summen av rekken.

Formel for summen av en geometrisk rekke

$$\sum_{j=0}^N a \cdot r^j = \begin{cases} \frac{a(r^{N+1} - 1)}{r - 1}, & r \neq 1 \\ a(N + 1), & r = 1 \end{cases}$$

Antall ledd i rekken blir her $N + 1$ fordi vi starter med $n = 0$.

Eksempel 1

Hva blir summen av tallene $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \dots + 128$?

Tallene kan skrives som

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7$$

Her er $a = 1$, $r = 2$ og største indeks $N = 7$.

$$\sum_{j=0}^7 2^j = \frac{2^{7+1} - 1}{2 - 1} = 2^8 - 1 = 256 - 1 = 255$$

Bevis av formelen

La

$S_N = \sum_{j=0}^N a \cdot r^j$ være summen av en geometrisk rekke der N er høyeste indeks (antall ledd blir $N + 1$). a er første ledd og r er det konstante forholdet mellom et vilkårlig ledd og det foregående.

$$S_N = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^N$$

Ganger med r på begge sider:

$$r \cdot S_N = ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^N + ar^{N+1}$$

Trekker fra S_N på begge sider:

$$r \cdot S_N - S_N = ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^N + ar^{N+1} - S_N$$

$$r \cdot S_N - S_N = ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^N + ar^{N+1} - a - ar - ar^2 - ar^3 - \dots - ar^N$$

Sitter igjen med $ar^{N+1} - a$ på høyre siden etter at de andre leddene på høyresiden faller bort. Setter S_N utenfor parentesen på venstresidene og a utenfor parentesen på høyresiden:

$$S_N(r - 1) = a(r^{N+1} - 1)$$

Deler til slutt med $r - 1$ på begge sider:

$$S_N = \frac{a(r^{N+1} - 1)}{r - 1} \text{ der } r \neq 1$$

NB! Formelen gjelder ikke når $r = 1$, men da ser rekka slik ut:

$$S_N = a + a + a + \dots + a = a(N+1)$$

NB! Her er N største indeks og $N+1$ antall ledd i rekken.

Eksempel 2

Hva blir summen

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32}$$

Dette kan skrives som

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^0 + \left(-\frac{1}{2}\right)^1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + \left(-\frac{1}{2}\right)^4 + \left(-\frac{1}{2}\right)^5$$

Dermed får vi

$$\sum_{j=0}^5 \left(-\frac{1}{2}\right)^j = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{5+1} - 1}{-\frac{1}{2} - 1} = \frac{\frac{1}{64} - 1}{-\frac{3}{2}} = \frac{21}{32}$$

Tester eksempel 2 i Java:

```

// Beregner summen av 3+6+12+24+48+ ... +384
// 384 = 3*128, 128 = 2 i syvende, dvs. N = 7

import javax.swing.JOptionPane;

class GeometriskRekke
{
    // 3+6+12+24+48+ ... +384, 384 = 3*128, 128 = 2 i syvende

    public static void main(String[] args)
    {
        double a = 3; // Første ledd i rekka
        double r = 2; // Forholdet mellom ett ledd og det foregående
        int n = 7;    // Høyeste indeks

        // Beregner summen vha. en for-løkke:
        double sum2 = 0;
        double ledd = a;
        for(int j = 0; j <= n; j++)
        {
            sum2 += ledd;
            ledd *= r; // ledd = ledd*r;
        }

        // Beregner summen vha. formelen:
        double sum1 = a*(Math.pow(r,n+1) - 1)/(r - 1);

        JOptionPane.showMessageDialog(null,
            "Summen beregnet med forløkke: " + (int)sum1 +
            "\nSummen beregnet med formelen: " + (int)sum2);
    }
}

```

Utskrift:



Eksempel 3

Hva blir summen $16 + 32 + 64 + \dots + 512$?

$a = 16, r = 2$

Rekken kan skrives som

$$16 \cdot 2^0 + 16 \cdot 2^1 + 16 \cdot 2^2 + \dots + 16 \cdot 2^5$$

Summen blir da:

$$\sum_{j=0}^5 16 \cdot 2^j = \frac{16(2^{5+1} - 1)}{2 - 1} = 16 \cdot 63 = 1008$$

Hvordan fant vi ut at $512 = 16 \cdot 2^5$?

Vi vet at $a_n = a \cdot r^n$

Vi får $512 = 16 \cdot 2^N$ (bruker stor N siden det er siste leddet)

Da blir $2^N = 512/16 = 32 = 2^5$

Prøv å teste eksempel 3 i Java også!

Eksempel 4. Binære tall

Datotypen *int* i Java har 32 binære siffer (4 byte). Det første av disse kalles fortegnssiffer. Dette bestemmer om tallet er positivt eller negativt. Hvis det er 1 er tallet negativt og hvis det er 0 er tallet ikke-negativt dvs. 0 eller positivt.

Java-kode:

```
int x = 0b00101010101010101010101010101010;
int y = 0b10101010101010101010101010101010;

System.out.println( "x = " + x + "\ny = " + y );

/* utskrift:
   x = 715827882
   y = -1431655766
*/
```

Det største mulige (positive) heltallet ser slik ut:

01111111111111111111111111111111;

Tallet har 31 1'ere! Hvilket tall er det?

Vi kan se på tallet som en geometrisk rekke:

$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \dots + 2^{30}$

Nå kan vi ved hjelp av formelen finne tallet:

$$\sum_{j=0}^{30} 2^j = \frac{(2^{30+1} - 1)}{2 - 1} = 2^{30+1} - 1 = 2147483647$$

Svaret kan vi teste i Java:

```
int x = 0b01111111111111111111111111111111;  
System.out.println( x );  
// utskrift: 2147483647
```

Hva tror du utskriften blir hvis vi legger til 1?

```
int x = 2147483647;  
System.out.println( x );  
// utskrift: 2147483647  
x = x + 1;  
System.out.println( x );
```

Kjør programmet og test svaret!