

KOMBINATORIKK OG SANNSYNLIGHETSREGNING - FORTSETTELSE

Permutasjoner og utvalg

En *permutasjon* av en samling objekter er en eller annen rekkefølge objektene i samlingen kan settes opp i.

Eksempel 1

Gitt bokstavene a, b, c og d. Da er følgende oppstillinger permutasjoner av a, b, c og d:

a, b, c, d c, b, a, d d, a, b, c b, a, d, c

De fire bokstavene kan permuteres på $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4! = 24$ måter.

Eksempel 2

Gitt tallene 11, 12, 13, 14, 15 og 16. Da er følgende oppstillinger permutasjoner av 11, 12, 13, 14, 15 og 16:

11, 12, 13, 14, 15, 16 13, 16, 14, 11, 12, 15

16, 15, 14, 13, 12, 11 15, 14, 11, 12, 13, 16

De seks tallene kan permuteres på $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6! = \underline{720}$ måter.

Antall forskjellige permutasjoner

Gitt n forskjellige objekter. Det er n muligheter for å velge det som skal stå først, $n-1$ mulighet for å velge det som skal stå nest først, osv. Til sammen blir det:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

forskjellige permutasjoner.

NB! $n!$ leses som «n fakultet».

Ordnete r-utvalg (eller r-permutasjoner)

Gitt n forskjellige objekter. Ut fra disse n objektene skal vi velge r objekter i rekkefølge. Et slikt utvalg kalles et *ordnet r-utvalg* eller en *r-permutasjon* fordi rekkefølgen objektene velges i har betydning.

Spørsmål: Hvor mange forskjellige *ordnede r-utvalg* er det?

Svar: n muligheter for å velge det som skal stå først, $n-1$, mulighet for å velge det som skal stå nest først, osv. til $n-r+1$ muligheter for å velge det siste av de r objektene som skal velges. Dermed får vi:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Læreboka bruker formelen $P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$

(P står for Permutasjon, som betyr at rekkefølgen objektene velges i har betydning.)

Eksempel 1

Gitt tallene 1 til 6. Hvor mange ordnede 3-utvalg er det?

Her er $n = 6$ og $r = 3$. Vi får da

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6!}{3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = \underline{\underline{120}}$$

Eksempel 2

Gitt bokstavene A til Å. Hvor mange ordnede 5-utvalg er det?

Her er $n = 29$ og $r = 5$. Vi får da

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{29!}{(29-5)!} = \frac{29!}{24!} = 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25 = \underline{\underline{14250600}}$$

5 tall

Eksempel 3

En forening har 50 medlemmer. De skal velges et styre på fire personer (leder, nestleder, kasserer og sekretær). Hvor mange forskjellige styresammensetninger er det mulig å få til? Her er $n = 50$ og $r = 4$. Vi får da

$$P(50, 4) = \frac{50!}{(50-4)!} = \frac{50!}{46!} = 50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47 = \underline{\underline{5527200}}$$

4 tall = r

Legg merke til at antall faktorer i svaret er lik r .

Uordnede r -utvalg eller r -kombinasjoner

Hvis en velger et utvalg på r stykker fra en samling på n forskjellige objekter og rekkefølgen ikke er av betydning, kalles det et *uordnet r -utvalg* eller en *r -kombinasjon*.

Eksempel

Gitt tallene fra 1 til 10. Vi skal velge tre tall, f.eks. 2, 5, 8. De samme tallene kan også velges ut i disse rekkefølgene:

2, 8, 5 5, 2, 8 8, 5, 2 8, 2, 5.

De tre tallene 2, 5 og 8 kan permuteres på $3! = 6$ forskjellige måter, men når rekkefølgen ikke betyr noe, vil alle disse $3! = 6$ utvalgene utgjøre det samme utvalget. Dermed må vi dele det tilsvarende 3-permutasjonen på $3!$, jf. divisjonsregelen.

$$\frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10!}{(10-3)! \cdot 3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \underline{\underline{120}}$$

Vi får 120 forskjellige uordnede r-utvalg.

Dette gir oss følgende viktige formel:

$$\frac{n!}{(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!}$$

Læreboka bruker formelen $C(n, r) = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!}$

(C står for Combination, som betyr at rekkefølgen objektene velges i ikke har betydning.)

Eksempel

Gitt en kortstokk med 52 kort. Hvor mange korthender på 5 kort finnes det. Rekkefølgen av kortene velges i spiller ingen rolle.

Her er $n = 52$ og $r = 5$. Vi får:

$$C(n, r) = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!} = \frac{52!}{(52-5)! \cdot 5!} = \frac{52!}{47! \cdot 5!} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

$$= 52 \cdot 51 \cdot 49 \cdot 20 = 2598960$$

Denne formelen er så viktig at den har fått sitt eget symbol:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!} \quad r \geq 0, \quad n \geq 0$$

Symbolet $\binom{n}{r}$ leses som « n over r » og kalles for en *binomialkoeffisient*.

Læreboka bruker som sagt

$C(n, r)$ istedenfor $\binom{n}{r}$ og $P(n, r)$ istedenfor $\frac{n!}{(n-r)!}$

Merk! $r = 0$ gir mening: $\binom{n}{0} = 1$ fordi $0! = 1$

Eksempel

Hvor mange bit-sekvenser av lengde 8 har nøyaktig tre 1'ere (og dermed fem 0'er)?

Vi kan velge de 3 plassene der det skal være 1-ere på $\binom{8}{3}$ forskjellige måter:

$$C(8,3) = \binom{8}{3} = \frac{8!}{(8-3)! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56$$

Av de $2^8 = 256$ mulige bit-sekvensene er det 56 som har nøyaktig tre 1'ere.

Vi kunne ha tenkt omvendt: Det må være like mange bit-sekvenser av lengde 8 som har nøyaktig fem 0'er som det er bit-sekvenser med nøyaktig tre 1'ere, dvs.

$$C(8,5) = \binom{8}{5} = \frac{8!}{(8-5)! \cdot 5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56$$

Vi kom frem til samme svar.

$$C(8,3) = \binom{8}{3} = \binom{8}{5} = C(8,5)$$

Dette gir oss følgende formel:

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

Andre viktige observasjoner:

$$0! = 1 \quad \binom{0}{0} = 1 \quad \binom{n}{0} = 1 \quad \binom{n}{1} = n \quad \binom{n}{n} = 1$$