

KOMBINATORIKK OG SANNSYNLIGHETSREGNING

FORTSETTELSE

Permutasjon der det inngår like verdier

Hvis vi har n forskjellige objekter, kan de permuteres på $n!$ forskjellige måter. Men hvis noen av objektene er like er det annerledes.

Eksempel

Gitt bokstavene A, A, A, B, B, C, dvs. 6 bokstaver. Hvor mange måter kan disse permuteres på?

Vi kan dele hele oppgaven opp i 3 deloppgaver:

1. Vi starter med å beregne hvor mange måter vi kan plassere A'ene på. Vi har 6 plasser å velge mellom og skal plassere 3 stykker. Dette kan sammenlignes med å skulle velge ut 3 plasser av 6 mulige. Dermed får vi $n = 6$ (antall mulige valg av plass for A)
 $r = 3$ (antall A'er som skal plasseres)
Mulige plasseringer for A'ene blir:

$$\binom{n}{r} = \binom{6}{3}$$

A _ _ A _ A

2. Etter at A'ene er plassert skal vi plassere B'ene. Det er nå 3 ledige plasser å velge mellom og skal vi velge 2 av dem (fordi vi har 2 B'er). Dermed blir $n = 3$ og $r = 2$ og vi får

$$\binom{n}{r} = \binom{3}{2}$$

mulige plasseringer av B'ene etter at A'ene er plassert.

A _ B A B A

3. Etter at alle A'er og begge B'ene er plassert skal C'en plasseres. Nå er det imidlertid kun en plass som skal velges, men også bare en ledig plass igjen slik at $n = r = 1$. Bruker vi samme formel får vi $\binom{n}{r} = \binom{1}{1} = 1$ plass å plassere C-en.

Ifølge produktregelen blir løsningen på hele oppgaven produktet av de tre deloppgavene:

$$\binom{6}{3} \cdot \binom{3}{2} \cdot \binom{1}{1} = \binom{6}{3} \cdot \binom{3}{3-2} = \binom{6}{3} \cdot \binom{3}{1} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot 3 = 60$$

Generelt

Gitt n objekter der k av dem er forskjellige. Anta at det er n_1 stykker av type 1, n_2 stykker av type 2, n_3 stykker av type 3, osv. til n_k stykker av type k . Da har vi at

$$n = n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k$$

De n objektene kan permuteres på

$$\binom{n}{n_1} \cdot \binom{n-n_1}{n_2} \cdot \binom{n-n_1-n_2}{n_3} \cdot \dots = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \cdot \dots \cdot n_k!}$$

Eksempel 1

Hvor mange måter kan bokstavene i ordet RABARBRA stokkes om? Totalt er det 8 bokstaver hvorav det er 3 A'er, 3 R'er og 2 B'er. Dermed blir svaret:

$$\frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2} = 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 2 = 560$$

Eksempel 2

Hvor mange måter kan bokstavene i ordet SUPPEPOSE stokkes om? Totalt er det 9 bokstaver hvorav det er 3 P'er, 2 S'er, 2 E'er, 1 U, og 1 O. Dermed blir svaret:

$$\frac{9!}{3! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = 3 \cdot 7! = 15120$$

Eksempel 3

Hvor mange måter kan bokstavene i ordet KULTURUKE stokkes om? Totalt er det 9 bokstaver hvorav det er 3 U'er, 2 K'er, 1 L, 1 T, 1 R og 1 E. Dermed blir svaret:

$$\frac{9!}{3! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 2} = 30240$$

Dikteren Jan Erik Vold utgav i 1969 diktsamlingen «Kykelipi». Et av diktene handler om omstokking av bokstavene i ordet KULTURUKE. Det inneholdt følgende omstokking:

ulturkuke	tulekukur
tulkuruke	luretukuk
ultkuruke	kukutelur
ukturulke	ruktukule
tlukuruke	lurekuktu
ukturkule	luekuktur
urtukulke	kuktulure
turlukuke	rukletuku
kulrukute	tuklekuru
ultrukuke	urukekult
kuleturuk	kuruketul
rulekukur	

Hør dikterens egen opplesing på Youtube:

<https://www.youtube.com/watch?v=pGM2RaPE-VY>

Samme ide i en annen sammenheng.

Anta at vi har n forskjellige objekter som skal deles i k antall grupper. Det skal være n_1 stykker i gruppe 1, n_2 stykker i gruppe 2, n_3 stykker i gruppe 3, osv. til n_k stykker i gruppe k . Vi har at

$$n = n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k$$

De n objektene kan dele i k grupper på følgende antall måter:

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \cdot \dots \cdot n_k!}$$

Eksempel

I kortspillet Bridge fordeles hele kortstokken på 52 kort på 4 spillere slik at de hver får 13 kort. På hvor mange måter kan kortene deles ut? (NB! Her spiller rekkefølgen en rolle.)

Svar: $\frac{52!}{13! \cdot 13! \cdot 13! \cdot 13!} = 53644737765488792839237440000$