**Ekvivalensrelasjoner**
En relasjon R på en mengde A er en *Ekvivalensrelasjon* hvis den er *refleksiv, symmetrisk og transitiv*.

**Partielle ordninger**
En relasjon R på en mengde A er en *Partiell ordning* hvis den er *refleksiv, anti-symmetrisk og transitiv*.

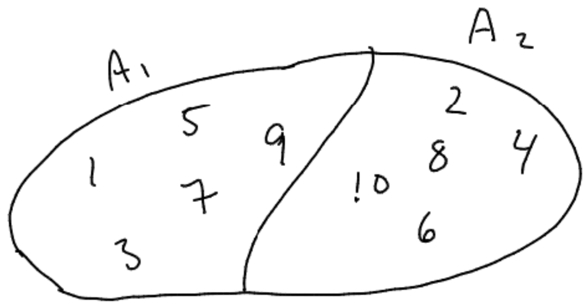
# Partisjoner (oppdelinger)

Gitt en mengde A, og delmengdene $A_1$ og $A_2$, der

$$A_1 \cup A_2 = A$$
$$A_1 \cap A_2 = \emptyset$$

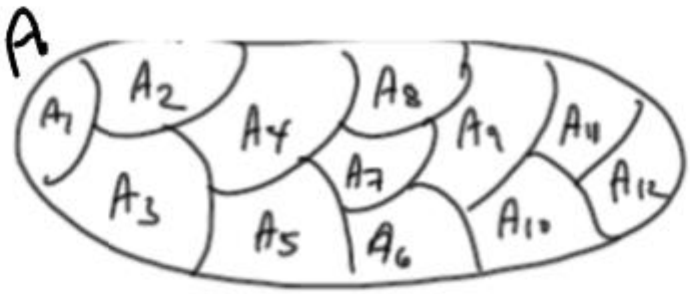
dvs. at $A_1$ og $A_2$ utgjør til sammen hele A, samt at $A_1$ og $A_2$ *disjunkte mengder* uten felles elementer. Vi sier da et $A_1$ og $A_2$ utgjør en partisjon av A. Et annet ord for partisjon er oppdeling.

Eksempel
La A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}, der
$A_1$ = {1, 3, 5, 7, 9}, dvs. mengde av oddetallene i A
$A_2$ = {2, 4, 6, 8, 10} dvs. mengde av partallene i A
$A_1 \cup A_2 = A$
$A_1 \cap A_2 = \emptyset$, dvs. $A_1$ og $A_2$ er disjunkte mengder uten felles elementer.
Delmengdene $A_1$ og $A_2$ utgjør en partisjon av A.



## En partisjon (oppdeling)

En samling delmengder $A_1$, $A_2$, $A_3$, . . . , $A_n$ av en mengde $A$ utgjør en partisjon av $A$ hvis $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ . \ . \ . \ \cup A_n = A$ og $A_i \cap A_j =$ Ø for alle $i \neq j$ .




### Setninger 1

La R være en ekvivalensrelasjon på en mengde A. Da vil ekvivalensklassene til R utgjøre en partisjon av A.

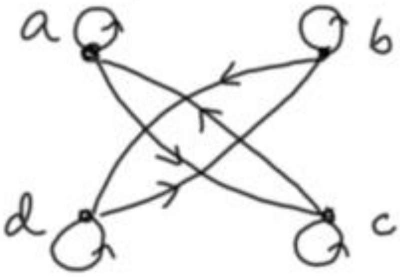
Eksempel 1

La A = {a, b, c, d} og

R = {(a, a), (a, c), (b, b), (b, d), (c, a), (c, c), (d, b), (d, d)}

Vi ser at relasjonen R er refleksiv, symmetrisk og transitiv. R er derfor en ekvivalensrelasjon:

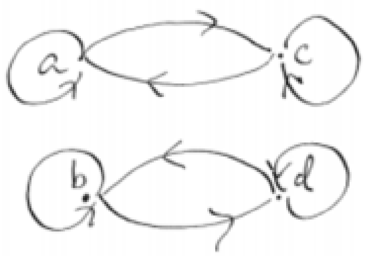
Grafen $G_R$ til R:




Matrisen $M_R$ til R:

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vi ser at grafen $G_R$ består av to separate deler som ikke er relatert til hverandre. Vi kunne tegnet den slik:




Hver del gir opphav til en ekvivalensklasse:

$[a]_R = [c]_R = \{a, c\}$,

$[b]_R = [d]_R = \{b, d\}$

Siden $[a]_R = [c]_R$ og at $[b]_R = [d]_R$ vil ekvivalensklassene $[a]_R$ og $[b]_R$ utgjør en partisjon av A, der
$[a]_R \cup [b]_R = A$ og $[a]_R \cap [b]_R = \emptyset$

Siden $[a]_R = [c]_R$ og at $[b]_R = [d]_R$ vil ekvivalensklassene $[a]_R$ og $[b]_R$ utgjør en partisjon av A, der
$[a]_R \cup [b]_R = A$ og $[a]_R \cap [b]_R = \emptyset$

## Setning 2

Omvendt: Gitt en partisjon av en mengde A. Da definerer den en ekvivalensrelasjon R på A ved at alle elementene i hver delmengde i partisjonen relateres til hverandre og seg selv.

<u>Eksempel</u>

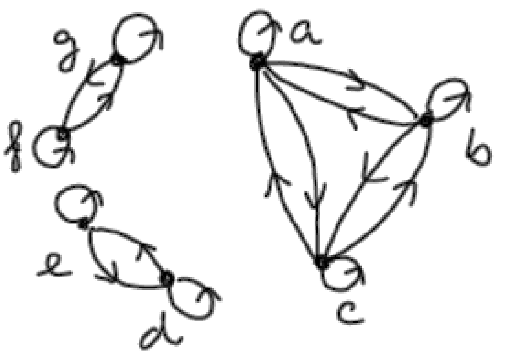
La A = { a, b, c, d, e, f, g }.

La $A_1 = \{a, b, c\}$, $A_2 = \{d, e\}$ og $A_3 = \{f, g\}$

Vi ser at $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = A$ og at $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \emptyset$.

Dette definerer følgende ekvivalensrelasjon:
R = {(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a), (a, c), (c, a), (b, c), (c, b), (d, d), (e, e), (d, e), (e, d), (f, f), (g, g), (f, g), (g, f)}

Grafen $G_R$ til $R$:




Matrisen $M_R$ til $R$:

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$