

Nestede kvantorer

En utsagnsfunksjon P kan ha flere variabler, f.eks. $P(x, y)$. Vi får utsagn ved å sette inne konkrete verdier for variablene eller ved å knytte variablene til kvantorer.

Eksempel 1

La funksjonen $P(x, y)$ være gitt ved setningen: « x elsker y », der x og y er personer. Hver gang vi setter inn bestemte personer for x og y får vi et utsagn som enten er sant eller usant. Hvis x er Kari og y er Per, kan det avgjøres om utsagnet $P(\text{Kari}, \text{Per})$ dvs. «*Kari elsker Per*», er sant eller usant.

Den eller de av variablene som vi ikke har satt inn verdier for må vi knytte til en kvantor for at det skal bli et utsagn:

$\forall x P(x, \text{Per})$ - «*Alle elsker Per.*»

$\forall y P(\text{Kari}, y)$ - «*Kari elsker alle.*»

$\exists x P(x, \text{Per})$ - «*Det finnes noen som elsker Per.*»

$\exists y P(\text{Kari}, y)$ - «*Kari elsker noen.*»

Hvis begge variablene kan knyttes til kvantorer har vi fire muligheter:

- $\forall x \forall y P(x, y)$ - *for alle x og for alle y gjelder $P(x, y)$*
- $\forall x \exists y P(x, y)$ - *for alle x finnes en y slik at $P(x, y)$ er sann.*
- $\exists x \forall y P(x, y)$ - *det finnes en x slik at for alle y så er $P(x, y)$ sann.*
- $\exists x \exists y P(x, y)$ - *det finnes en x og en y slik at $P(x, y)$ er sann.*

Oppgaver

Følgende påstander kan oversettes til utsagn ved bruk av utsagnsfunksjonen $P(x, y)$ og kvantorene $\forall$ og $\exists$:

- «*alle elsker noen*»

Svar: $\forall x \exists y P(x, y)$

- «noen elsker alle»

Svar: $\exists x \forall y P(x, y)$

- «ingen elsker Per»

Svar: $\neg \exists x P(x, \text{Per})$

Eksempel 2

La x og y være hele tall og la

$P(x, y) = x + y = 1$.

Avgjør sannhetsverdien av følgende utsagn:

- $\forall x \forall y (x + y = 1)$ Usant
- $\forall x \exists y (x + y = 1)$ Sant
- $\exists x \forall y (x + y = 1)$ Usant
- $\exists x \exists y (x + y = 1)$ Sant

Legg merke til at

$$\forall x \exists y (x + y = 1) \neq \exists x \forall y (x + y = 1)$$

Negasjoner:

I eksempelet

$P(x, y)$: « x elsker y »

Brukte vi kvantorer til å lage følgende utsagn:

«Alle elsker noen»: $\forall x \exists y P(x, y)$

Negasjonen $\neg \forall x \exists y P(x, y)$ kan lese som

«Det er ikke slik at alle elsker noen»

$\neg \forall x \exists y P(x, y) \equiv \exists x \forall y \neg P(x, y)$ som igjen kan leses som

«Det finnes noen som ikke elsker noen» eller sagt på en annen måte: «Noen elsker ingen». («somebody loves nobody»)

Negerer vi et utsagn som inneholder kvantorer, kan vi flytte negasjonstegnet fra venstre mot høyre helt til det står inntil predikatet:

- $\neg \forall x \forall y P(x, y) \equiv \exists x \neg \forall y P(x, y) \equiv \exists x \exists y \neg P(x, y)$
- $\neg \forall x \exists y P(x, y) \equiv \exists x \neg \exists y P(x, y) \equiv \exists x \forall y \neg P(x, y)$
- $\neg \exists x \forall y P(x, y) \equiv \forall x \neg \forall y P(x, y) \equiv \forall x \exists y \neg P(x, y)$
- $\neg \exists x \exists y P(x, y) \equiv \forall x \neg \exists y P(x, y) \equiv \forall x \forall y \neg P(x, y)$

Legg merke til vi da må skifte kvantorer; $\forall$ blir til $\exists$ og $\exists$ blir til $\forall$, for hver gang negasjonstegnet passerer en kvantor på sin vei fra venstre mot høyre.

Utsagn	Når er det sant?	Når er det usant?
$\forall x \forall y P(x, y)$	Når $P(x, y)$ er sann for hvert par x, y .	Når det finnes et par x, y som gjør $P(x, y)$ usann.
$\forall x \exists y P(x, y)$	Når det for hver x finnes en y som gjør $P(x, y)$ sann.	Når det finnes en x som gjør $P(x, y)$ usann for hver y .
$\exists x \forall y P(x, y)$	Når det finnes en x som gjør $P(x, y)$ sann for hver y .	Når det for hver x finnes en y som gjør $P(x, y)$ usann.
$\exists x \exists y P(x, y)$	Når det finnes et par x, y som gjør $P(x, y)$ sann.	Når $P(x, y)$ er usann for hvert par x, y .

NB! Rekkefølgen på kvantorene er viktig!

Vi har generelt at $\forall x \exists y P(x, y) \neq \exists x \forall y P(x, y)$

Alle: $\forall$

Noen: $\exists$

Ingen: $\neg \exists$

Ikke alle: noen eller ingen