Matriser

En matrise er en rektangulær oppstilling av tall og betegnes med en stor bokstav, f.eks. A, B, C …

<u>Eksempler</u>

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Tallene i en matrise kalles *matriseelementer* eller bare *elementer.* En matrise har rader (vannrett, horisontalt) og kolonner (loddrett, vertikalt). I eksemplene har A 2 rader og 3 kolonner, B har 3 rader og 2 kolonner, mens C har 2 rader og 2 kolonner.

<u>Eksempler.</u>

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}$$

1 rad, 3 kolonner 3 rader, 1 kolonne 1 rad, 1 kolonne

NB! Legg merke til at en matrise kan ha en rad og en kolonne! Da inneholder matrisen kun ett element.

Matrisedimensjon.
En matrise med *m* rader ($m > 0$) og <u>n</u> kolonner ($n > 0$) har dimensjon *mxn*.

<u>Eksempel</u>

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

A er har dimensjon 3x4 og kalles en 3x4-matrise.

Kvadratiske matriser

En matrise er kvadratisk hvis *antall rader er lik antall kolonner.*

<u>Eksempel.</u>

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

B er en 3x3-matrise og dermed en kvadratisk matrise.

Diagonaler

En kvadratisk matrise har en hoved-diagonal og en bi-diagonal. Hoved-diagonalen består av elementene fra det øverste venstre hjørnet og på skrå ned til det nederste høyre hjørnet. Bi-diagonalen består av elementene fra det øverste høyre hjørnet og på skrå ned til det nederste venstre hjørnet.

<u>Eksempel.</u>

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix} \quad 4\times 4\text{-matrise}$$

Bi diagonal

Hoved diagonal

En generell *mxn*-matrise:

$$A \underset{i}{=} \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & . & . & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & . & . & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & . & . & a_{3,n} \\ . & . & . & . & a_{i,j} & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{m,1} & a_{m,2} & a_{m,3} & . & . & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

Elementet

$$a_{i,j}$$

er elementet på rad *i* og kolonne *j.*

Matrisearitmetikk

Addisjon og subtraksjon av matrisen

La A og B være to *mxn*-matriser (dvs. de har samme dimensjon). Da defineres A+B som den matrisen vi får ved å parvis addere elementene fra A og B. Hvis $a_{i,j} \in A$ og $b_{i,j} \in B$ så vil $a_{i,j} + b_{i,j} \in A+B$. Dvs. elementet på plass *i,j* i A+B er summen av $a_{i,j}$ og $b_{i,j}$.

Eksempel 1

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad A+B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Eksempel 2

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Hva er A+B?
Her er ikke A+B definert fordi A og B har forskjellige dimensjoner.
A er en 2x3-matrise, mens B er er 2x2-matrise.

Et tall multiplisert med en matrise

La a være et tall og A en vilkårlig matrise. Matrisen aA er den matrisen vi får ved å multiplisere alle elementene i A med tallet a.

Eksempel

$$a = 3, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad aA = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 6 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Matrisemultiplikasjon

(metoden vi brukte over kan **ikke** videresføres til matrisemultiplikasjon!)

Gitt to matriser A og B.

Hvis antall kolonner i A er lik antall rader i B kan vi multiplisere A og B og danne matriseproduktet AB.

Hvis A er en *mxn*-matrise må B være en *nxk* matrise for at produktet AB skal være definert. Produktet AB får da dimensjonen *mxk* og er dermed en *mxk*-matrise.

NB! Hvis A er en *mxn*-matrise og B er en *nxm*-matrise blir AB en *mxm*-matrise, dvs. en kvadratisk matrise.

Som en del av matrisemultiplikasjonen må vi kunne «gange sammen» en rad i A med en kolonne i B. Det gjøres slik:

$$\begin{bmatrix} a & b & c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{bmatrix} = ax + by + cz + du$$

Matrisemultiplikasjonen AB gjennomføres ved at <u>alle</u> radene i A «ganges med» <u>alle</u> kolonnene i B. Elementet på plass <u>*i,j*</u> i AB er det vi får ved å «gange» rad_i i A med $kolonne_j$ i B.

<u>Eksempel</u>

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \text{ 3x2-matrise}$$

2x3-matrise

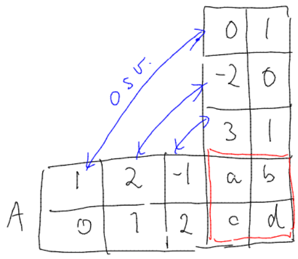
$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

AB er definert og blir en 2x2-matrise.

$$a = 1\cdot 0 + 2(-2) + (-1)3 = 0 - 4 - 3 = -7$$
$$b = 1\cdot 1 + 2\cdot 0 + (-1)\cdot 1 = 1 + 0 - 1 = 0$$
$$c = 0\cdot 0 + 1\cdot(-2) + 2\cdot 3 = 0 - 2 + 6 = 4$$
$$d = 0\cdot 1 + 1\cdot 0 + 2\cdot 1 = 0 + 0 + 2 = 2$$

Skjema for matrisemultiplikasjon

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

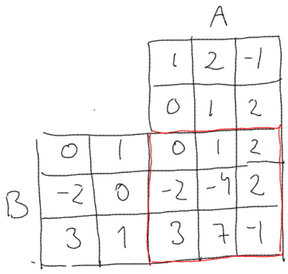


$AB = \begin{bmatrix} -7 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

2×2

$$a = 1\cdot 0 + 2(-2) + (-1)3 = 0 - 4 - 3 = -7$$
$$b = 1\cdot 1 + 2\cdot 0 + (-1)\cdot 1 = 1 + 0 - 1 = 0$$
$$c = 0\cdot 0 + 1\cdot(-2) + 2\cdot 3 = 0 - 2 + 6 = 4$$
$$d = 0\cdot 1 + 1\cdot 0 + 2\cdot 1 = 0 + 0 + 2 = 2$$

I vårt eksempel eksisterer også BA fordi B er 3x2-matrise og A er en 2x3-matrise:



$BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & -4 & 2 \\ 3 & 7 & -1 \end{bmatrix}$

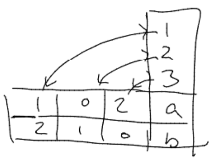
3×3

<u>NB! Legg merke til at AB ≠BA!</u>

<u>Eksempel</u>

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

$2 \times \underline{3}$ $\underline{3} \times 1$



$A \cdot B = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}$

NB! Legg merke til at antall rader i A **trenger ikke** være lik antall kolonner i B!

Kvadratiske matriser

Hvis en matrise A er kvadratisk kan den multipliseres med seg selv. Vi skriver vanligvis A^2 istedenfor AA, A^3 istedenfor AAA, osv. Spesielt er $A^1 = A$.

Enhetsmatriser, også kalt identitetsmatriser

Den kvadratiske matrisen I, som har 1-ere på hoveddiagonalen og 0-ere alle andre steder, kalles for enhets- eller identitetsmatrisen.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dimensjon 2x2 Dimensjon 3x3 Dimensjon 4x4

Definisjon

La A være en kvadratisk matrise, dvs. en *mxm*-matrise. Da er $A^0 = I$, der I er enhetsmatrisen med dimensjon *mxm* (dvs. samme dimensjon som A)

Eksempel

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Den transponerte matrisen

Den *transponerte* matrisen til en matrise A betegnes med A^T og er den matrisen vi får ved å bytte om rader og kolonner i A. Dvs. rad *i* i A blir kolonne *i* i A^T.

Eksempel.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Vi ser at 1. rad i A har blitt 1. kolonne i A^T og at 2. rad i A har blitt 2. kolonne i A^T.

Observasjon: Hvis A er en *mxn*-matrise blir A^T en *nxm*-matrise.

<u>Setning:</u>
Hvis A kan multipliseres med B, blir $(AB)^T = B^T \cdot A^T$.

Vi kan sjekke om det stemmer for eksempelet på side 6:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} -7 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \qquad (AB)^T = \begin{bmatrix} -7 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad B^T = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B^T \cdot A^T =$$

$$\begin{array}{r|ccc|cc|}
 & & & & \multicolumn{2}{c}{A^T} \\
\cline{5-6}
 & & & & 1 & 0 \\
 & & & & 2 & 1 \\
 & & & & -1 & 2 \\
\cline{2-6}
B^T \cdot & 0 & -2 & 3 & -7 & 4 \\
 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\
\cline{2-6}
\end{array}
\qquad B^T \cdot A^T = \begin{bmatrix} -7 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = (A \cdot B)^T$$

Symmetri

En kvadratisk matrise A kalles *symmetrisk* hvis $A = A^T$.

<u>Eksempel 1</u>

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad A^T = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad A = A^T$$

Matrisen kalles symmetrisk fordi den er symmetrisk om hoveddiagonalen.

<u>Eksempel 2</u>

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad A^T = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad A \neq A^T$$

I dette eksempelet er A **ikke** symmetrisk. Det som ødelegger symmetrien er at verdien i nederste venstre hjørnet (tallet 1) er forskjellig fra verdien i øverste høyre hjørne (tallet 0).

<u>Observasjon:</u> Enhetsmatrisen (identitetsmatrisen) er symmetrisk.

Nedenfor følger metoder i Java som implementerer matrisearitmetikk:

```java
public static int[][] matriseAddisjon( int[][] A, int[][] B )
{
  if( A.length != B.length || A[0].length != B[0].length )
    return null;

  // Matrisene har samme dimensjon!
  int[][] AplussB = new int[A.length][A[0].length];

  for(int rad = 0; rad < A.length; rad++ )
  {
    for( int kolonne = 0; kolonne < B[0].length; kolonne++ )
      AplussB[rad][kolonne] = A[rad][kolonne] + B[rad][kolonne];
  }
  return AplussB;
}
```

```java
public static int[][] matriseTransponert( int[][] M )
{
  int[][] Mt = new int[M[0].length][M.length];

  for(int rad = 0; rad < M.length; rad++ )
  {
    for( int kolonne = 0; kolonne < M[0].length; kolonne++ )
      Mt[kolonne][rad] = M[rad][kolonne];
  }
  return Mt;
}
```

```java
public static int[][] matriseProdukt(int[][] A, int[][] B)
{
  if( A[0].length != B.length  )
    return null;

  // Antall kolonner i A er lik antall rader i B
  int[][]AxB = new int[A.length][B[0].length];

  for(int rad = 0; rad < A.length; rad++ )
  {
    for( int kolonne = 0; kolonne < B[0].length; kolonne++ )
    {
      int sum = 0;

      for( int i = 0; i < A[0].length && i < B.length; i++)
        sum += A[rad][i]*B[i][kolonne];

      AxB[rad][kolonne] = sum;
    }
  }
  return AxB;
}
public static int[][] matriseTransponert( int[][] M )
{
  int[][] Mt = new int[M[0].length][M.length];

  for(int rad = 0; rad < M.length; rad++ )
  {
    for( int kolonne = 0; kolonne < M[0].length; kolonne++ )
      Mt[kolonne][rad] = M[rad][kolonne];
  }
  return Mt;
}
```

For å se resultatet trenger vi følgende metode:

```java
public static String utskrift( int[][] M )
{
  String s = M.length + "x" + M[0].length + "-matrise\n";

  for( int rad = 0; rad < M.length; rad++)
  {
    for( int kolonne = 0; kolonne < M[0].length; kolonne++ )
      s += M[rad][kolonne] + "   ";

    s += "\n";
  }
  return s;
}
```

Metodene foran blir kalt opp av følgende hovedprogram:

```
public static void main( String[] args )
{
  int[][] M = {{1, 2, 3}, {0, 1, 0}};
  String s = "\nM er en " + utskrift( M );

  int[][] Mt = matriseTransponert( M );
  s += "\nMt er en " + utskrift( Mt );

  int[][] A = {{1, 0, 2}, {0, 2, 1}};
  s += "\nA er en " + utskrift( A );

  int[][] B = {{0, 2, 1}, {1, 2, 3}};
  s += "\nB er en " + utskrift( B );

  int[][]AplussB = matriseAddisjon( A, B );
  s += "\nAplussB er en " + utskrift( AplussB );

  int[][] C = {{1, 2, -1}, {0, 1, 2}};
  s += "\nC er en " + utskrift( C );

  int[][] D = {{0, 1}, {-2, 0}, {3, 1}};
  s += "\nD er en " + utskrift( D );

  int[][]CxD = matriseProdukt( C, D );
  s += "\nCxD er en " + utskrift( CxD );

  JOptionPane.showMessageDialog( null, new JTextArea( s ) );
}
```

Koden kan lastes ned fra

https://www.cs.hioa.no/~evav/DM/Java17/MatriseRegning.java

https://www.cs.hioa.no/~evav/DM/Java17/MatriseRegning.txt