Inverse matriser

Definisjon

En kvadratisk matrise A er inverterbar hvis det fins en matrise B slik at

AB = BA = I, der I er identitetsmatrisen.

Den inverse matrisen til A betegnes som A^{-1}.

La A være en 2x2 matrise:

A = $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

Hvis A skal være inverterbar må $ad - bc$ være forskjellig fra null.

$ad - bc$ kalles for *determinanten*.

Oppgave

La A = $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

Vis at hvis $ad - bc \neq 0$ så er den inverse matrisen til A lik

A^{-1} = $\begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}$

Løsning:

Vi viser at $A^{-1} \cdot A = I$, der I er identitetsmatrisen.

$$A^{-1} \cdot A = \begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{da-bc}{ad-bc} & \frac{db-bd}{ad-bc} \\ \frac{-ca+ac}{ad-bc} & \frac{-cb+ad}{ad-bc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{ad-bc}{ad-bc} & \frac{bd-bd}{ad-bc} \\ \frac{ac-ac}{ad-bc} & \frac{ad-bc}{ad-bc} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Altså har vi vist at hvis $ad - bc \neq 0$ så er $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}$

Setter vi $\frac{1}{ad-bc}$ utenfor matrisen får vi *formelen for den inverse matrisen* til en 2x2 matrise:

$$\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

<u>Eksempel</u>

La A = $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ a = -1, b = 2, c = 1, d = 3

Siden $ad - bc =$ (-1)·3 - 2·1 ≠ 0 er A inverterbar og vi kan bestemme A^{-1}:

$$A^{-1} = \frac{1}{(-1)\cdot 3 - 2\cdot 1}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} = -\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

Vi kan undersøke om dette stemmer ved sjekke om $A \cdot A^{-1} = I$:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3+2}{5} & \frac{-2+2}{5} \\ \frac{-3+3}{5} & \frac{2+3}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$