

Induksjonsbevis

Problem

Vi skal bevisе at summen av de n første oddetallene er lik n^2 , dvs. at

$$1 + 3 + 5 + \dots + 2n-1 = n^2$$

Induksjonsbevis handler om å vise at en påstand $P(n)$ er sann for alle $n \geq 1$.

Beviset består av to trinn:

Basistrinnet: Vi må vise at $P(1)$ er sann.

Induksjonstrinnet:

1. Vi antar at $P(k)$ for et vilkårlig tall $k \geq 1$
2. Vi viser at hvis $P(k)$ er sann, så må $P(k+1)$ være sann, dvs. $P(k) \rightarrow P(k+1)$.

Hvis basistrinnet og induksjonstrinnet er oppfylt, sier induksjonsprinsippet viser at $P(n)$ er sann for alle $n \geq 1$.

Eksempel

La $P(n)$ være påstanden om at

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = \sum_{i=1}^n (2 \cdot i - 1) = n^2$$

Basistrinnet:

$$P(1): 2 \cdot 1 - 1 = 1 = 1^2 \text{ er sant}$$

Induksjonstrinnet:

- a) Antar at $P(k)$ er sann, dvs.
- b) Vi bruker så antagelsen til å vise at $P(k+1)$ er sann.

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + \dots + (2k-1) &= k^2 \\ 1 + 3 + 5 + \dots + (2k-1) + (2(k+1)-1) &= \\ 1 + 3 + 5 + \dots + (2k-1) + (2k+1) &= \\ 1 + 3 + 5 + \dots + 2k-1 + 2k+1 &= k^2 + 2k + 1^2 \end{aligned}$$

k^2 - antagelsen

I følge 1. kvadratsetning er $k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$

Dermed har vi vist at hvis $P(k)$ er sann, så er også $P(k+1)$ sann.

Konklusjon: Induksjonsprinsippet gir at $P(n)$ er sann for alle $n \geq 1$.

Eksempel 2

La $P(n)$ være påstanden at

6 går opp i $(n^3 - n)$ for alle $n \geq 1$.

Kan dette stemme?

$P(1): n^3 - n = 1^3 - 1 = 0$	6 går opp i 0 er sant.
$P(2): n^3 - n = 2^3 - 2 = 6$	6 går opp i 6 er sant.
$P(3): n^3 - n = 3^3 - 3 = 24$	6 går opp i 24 er sant.
$P(4): n^3 - n = 4^3 - 4 = 60$	6 går opp i 60 er sant.

Induksjonsbevis

Basistrinnet:

$$P(1): n^3 - n = 1^3 - 1 = 0 \quad 6 \text{ går opp i } 0 \text{ er sant.}$$

Induksjonstrinnet:

a) Antar at $P(k)$ er sann, dvs. at

6 går opp i $(k^3 - k)$ for alle $k \geq 1$.

b) Vi må bruke antagelsen til å vise at $P(k+1)$ er sann, dvs. at
6 går opp i $((k+1)^3 - (k+1))$.

$$\begin{aligned}
 & (k+1)^3 - (k+1) \\
 &= (k+1)^2(k+1) - (k+1) \\
 &= (k^2 + 2k + 1)(k+1) - (k+1) \\
 &= k^3 + 2k^2 + k + k^2 + 2k + 1 - k - 1 \\
 &= k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k - 1 \\
 &= k^3 - k + 3k^2 + 3k \\
 &= k^3 - k + 3(k^2 + k) = \underbrace{(k^3 - k)}_{\text{antagelsen}} + 3k(k+1)
 \end{aligned}$$

Vi har at k og $k+1$ er nabotall, og da må det ene av dem være partall, siden partall og oddetall kommer annenhver gang i tallrekken. Dermed går 2 opp i $k(k+1)$. Siden vi fra før har 3 som faktor, går $2 \cdot 3 = 6$ opp i $3k(k+1)$.

Vi har funnet at 6 går opp i $(k^3 - k) + 3k(k+1)$, og siden det er det samme som $(k+1)^3 - (k+1)$, går 6 opp der. Følgelig har vi vist at hvis $P(k)$ gjelder så gjelder også $P(k+1)$.

Konklusjon: Induksjonsprinsippet gir at $P(n)$ er sann for alle $n \geq 1$.

Eksempel 3

La $P(n)$ være påstanden at

3 går opp i $(5^n - 2^n)$ for alle $n \geq 1$.

Kan dette stemme?

$P(1): 5^1 - 2^1 = 5 - 2 = 3$	3 går opp i 3 er sant.
$P(2): 5^2 - 2^2 = 25 - 4 = 21$	3 går opp i 21 er sant.
$P(3): 5^3 - 2^3 = 125 - 8 = 117$	3 går opp i 117 er sant.

Induksjonsbevis

Basistrinnet:

$P(1): 5^1 - 2^1 = 5 - 2 = 3$ 3 går opp i 3 er sant.

Induksjonstrinnet:

- a) Antar at $P(k)$ er sann, dvs. at
3 går opp i $(5^k - 2^k)$ for alle $k \geq 1$.
- b) Vi må bruke antagelsen til å vise at $P(k+1)$ er sann, dvs. at 3 går opp i $(5^{k+1} - 2^{k+1})$.

$$5^{k+1} - 2^{k+1} = 5 \cdot 5^k - 2 \cdot 2^k = 3 \cdot 5^k + 2 \cdot 5^k - 2 \cdot 2^k =$$

$$3 \cdot 5^k + 2 \cdot 5^k - 2 \cdot 2^k = 3 \cdot 5^k + 2(5^k - 2^k)$$

$\underbrace{3 \cdot 5^k}_{\text{3 er faktor}} + \underbrace{2(5^k - 2^k)}_{\text{antagelsen}}$

Vi ser at 3 går opp i $3 \cdot 5^k$ fordi 3 her er faktor og at 3 går opp i $2(5^k - 2^k)$ fordi dette er gitt i antagelsen. Følgelig har vi vist at hvis $P(k)$ gjelder så gjelder også $P(k+1)$.

Konklusjon: Induksjonsprinsippet gir at $P(n)$ er sann for alle $n \geq 1$.