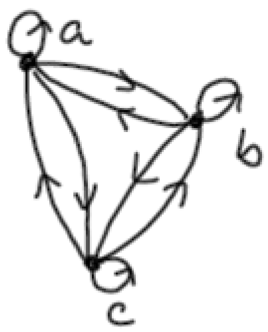
Kapittel 10 fra læreboka – Grafer

(utdrag)

En graf er en samling *punkter (noder)* og *kanter* mellom punktene (eng. *nodes, vertex, edge*).

En graf kalles *rettet* hvis kantene *har en retning* og *urettet* hvis kantene *ikke* har noen retning.

Eksempel
En relasjonsgraf er en rettet graf:



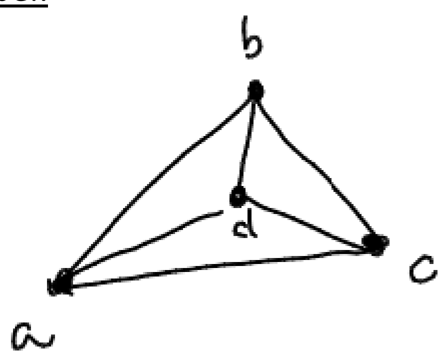
I dette kapittelet skal vi imidlertid kun se på **urettede grafer**.

Vi starter med å definere enkelte ord og begreper som vi får bruk for senere.

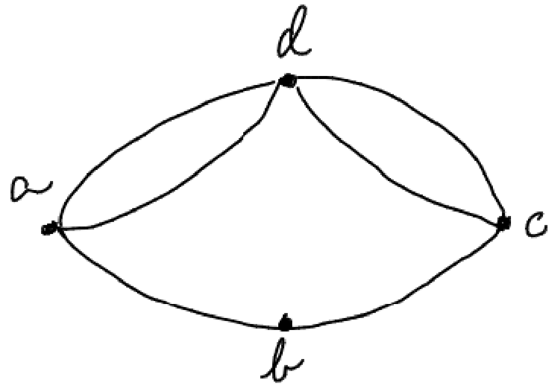
Forskjellige typer grafer

Vi skiller mellom tre typer urettede grafer:

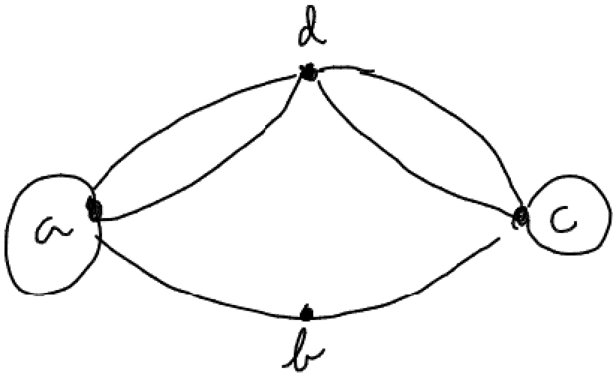
1) En **enkel graf** er en graf uten sløyfer på punktene og ingen doble kanter mellom punktene.
   Eksempel:



2) En **multigraf** er en graf uten sløyfer på punktene, men det kan være flere kanter mellom par av punkter (multiple kanter).
   Eksempel:



3) En **pseudograf** er en graf som verken er en multigraf eller en enkel graf. Den kan ha både sløyfer og flere kanter mellom par av punkter.
   <u>Eksempel</u>



Naboer

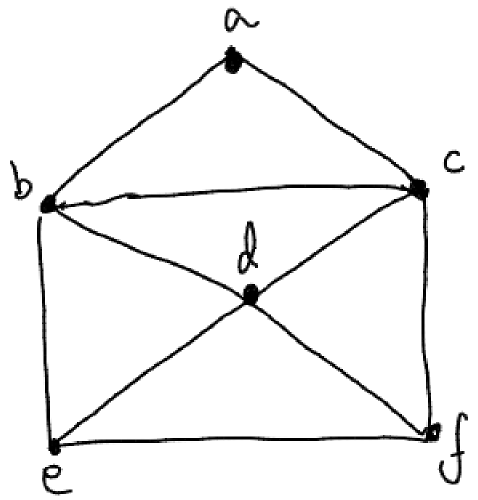
To punkter i en urettet graf kalles naboer hvis det går en kant mellom dem.

<u>Eksempel</u>

Graden til et punkt

Graden til et punkt i en urettet grad er antall forskjellige kanter som hører til punktet. En sløyfe teller som to kanter.

<u>Eksempel – konvoluttgrafen</u>



grad(a) = 2
grad(b) = 4
grad(c) = 4
grad(d) = 4
grad(e) = 3
grad(f) = 3

Et isolert punkt

Et punkt med grad 0 kalles et isolert punkt.

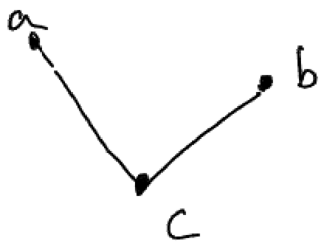
<u>Eksempel</u>

a og b er isolerte punkter.

En pedant

Et punkt med grad 1 kalles en pedant

<u>Eksempel</u>



a og b er pedanter, mens c er ikke det.

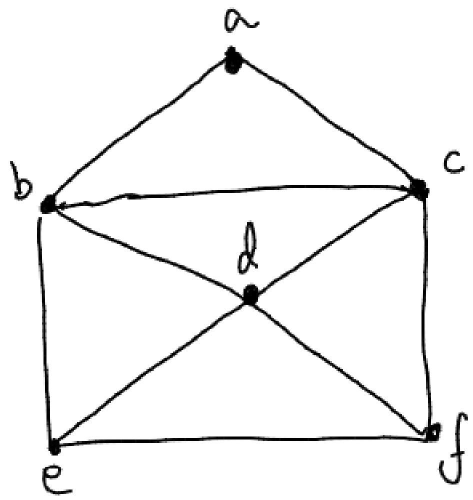
Grad-kant-setningen

Anta at en urettet graf har <u>*n*</u> antall punkter, $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ og <u>*k*</u> antall kanter. Da gjelder:

$$\sum_{i=1}^{n} grad(a_i) = 2k$$

Dvs. summen av gradene er det det dobbelte av antall kanter.

<u>Eksempel</u>



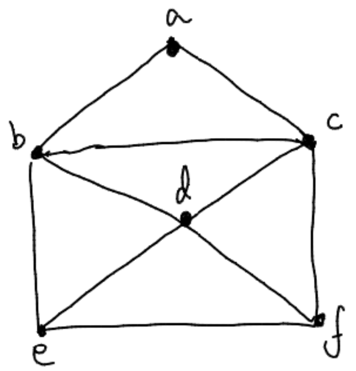
grad(a) = 2
grad(b) = 4
grad(c) = 4
grad(d) = 4
grad(e) = 3
grad(f) = 3

Summen av graden er 20 = 2k. Følgelig er det 10 kanter i grafen.

En vei i en urettet graf

En vei er en sammenhengende rekkefølge av punkter og kanter mellom punktene. En vei har et startpunkt og et sluttpunkt. En vei oppgis ved å oppgi startpunktet, så punktene som passeres på veien og til slutt sluttpunktet. Det brukes gjerne komma mellom punktene.

<u>Eksempel</u>



En vei fra a til f kan være:

1) a, c, f
2) a, b, e, f
3) osv.

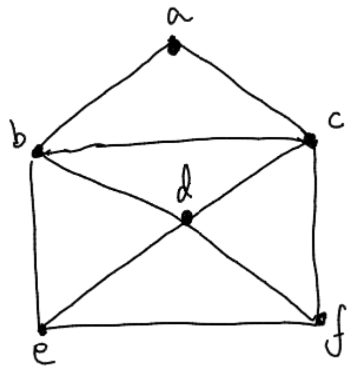
En lukket vei

En vei er *lukket* hvis den starter og slutter i samme punkt. En lukket vei kalles også for en sykel eller en krets.

En åpen vei

En vei er *åpen* hvis den starter og slutter i forskjellige punkter.

Eksempel



a, c, d, b, a er en lukket vei
a, c, d, e er en åpen vei.

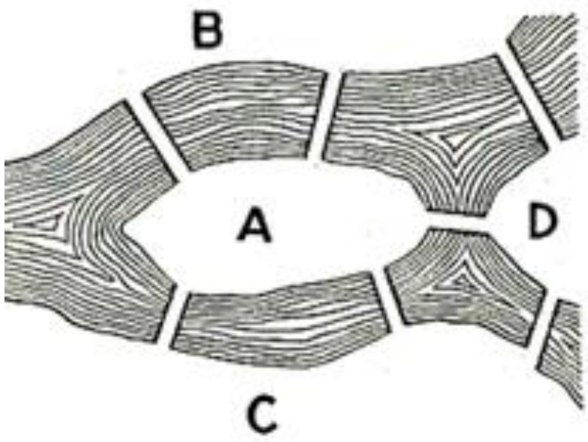
Enkel vei
En vei er *enkel* hvis ingen kant inngår mer enn én gang.

En sammenhengende graf
En urettet graf er *sammenhengende* hvis det finnes en vei mellom hvert par av punkter.

En Eulervei

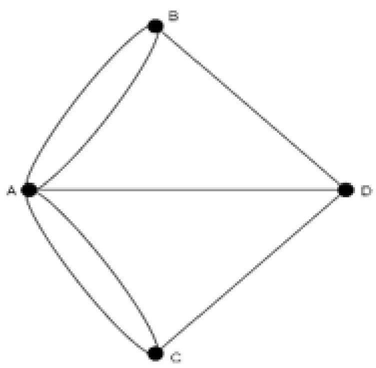
Sitat fra Wikipedia:
På 1700-tallet var byen Königsberg (nåværende Kaliningrad) i oppdelt i fire deler: den nordlige og sørlige siden av elven Pregel, som fløt gjennom byen, samt to øyer midt i elven – en mindre vestlig og en større østlig. Den minste av øyene, Kneiphof, var byens sentrum, der blant annet katedralen lå. Fra denne øya gikk det to broer til den nordlige bredden og to broer til den sørlige bredden, samt en bro til den største øya, og fra denne gikk det i sin tur en bro til den nordlige bredden og en bro til den sørlige bredden. Totalt var dermed øyene og fastlandet forbundet med hverandre ved sju broer. Det ble sagt at byens innbyggere på sine søndagsturer forsøkte å finne en måte å gå gjennom byen på en slik måte at man passerte hver bro bare en gang, og når turen var over var man tilbake til utgangspunktet. Ingen hadde dog lyktes med dette. Enkelte hevdet at det var umulig, men ingen visste dette sikkert.

Leonhard Euler (1707 – 1783) var en sveitsisk matematiker og han beviste, ved hjelp av grafteori, at en slik rundtur var umulig. og er opphavet til såkalte åpne og lukkede Euler-veier



<u>Problem</u>

Er det mulig å starte i områdene A, B, C eller D, gå over alle broene én og bare én gang og så ende opp der vi startet?
Brosystemet kan oversettes til en graf der områdene A, B, C og D blir punkter og broene kanter:



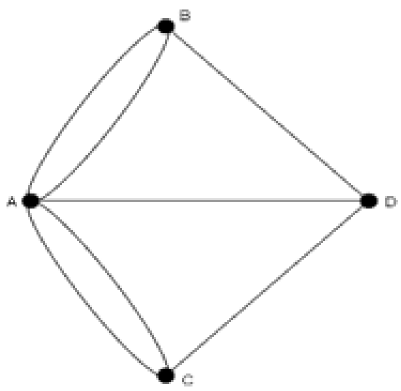
En lukket Euler-vei
Det finnes en *lukket Euler-vei* hvis alle kantene passeres én og bare én gang og man starter og ender opp i samme punkt.

En åpen Euler-vei
Det finnes en *åpen Euler-vei* hvis alle kantene passeres én og bare én gang og man starter i et punkt og slutter i et annet punkt.

Eulers setning

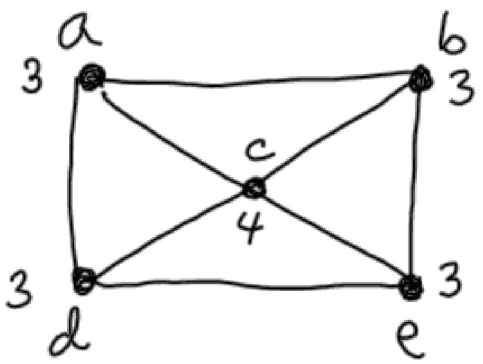
Gitt en urettet og sammenhengende multigraf med minst to punkter.

1) Det finnes en lukket Euler-vei hvis og bare hvis alle punktene har partallsgrad.
2) Det finnes en åpen Euler-vei hvis og bare hvis nøyaktig to av punktene har oddetallsgrad (og dermed resten partalls grad).

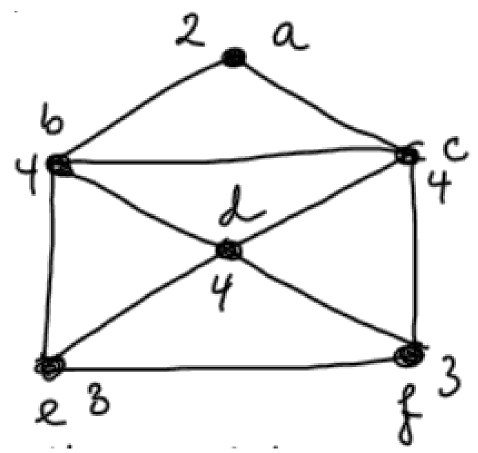


grad(A) = 5, grad(B) = 3, grad(C) = 3, grad(D) = 3.
Følgelig finnes det verken en åpen eller lukket Euler-vei. Det er ikke mulig å starte i områdene A, B, C eller D, gå over alle broene én og bare én gang verken om man starter og slutter på sammen sted eller på forskjellige steder.

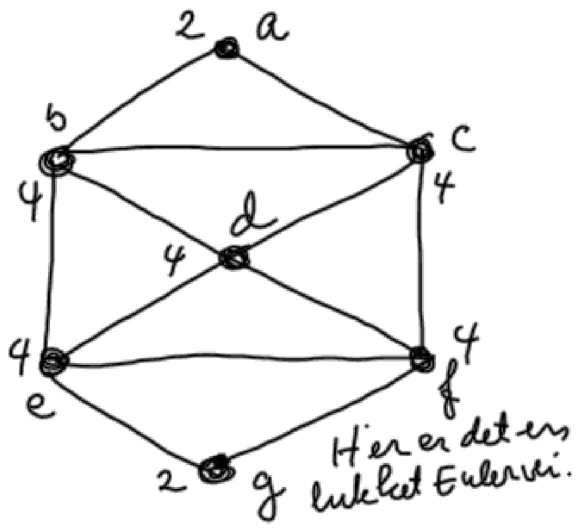
<u>Eksempler</u>



Ingen Eulervei fordi det er 4 punkter av odde grad.



Åpen Eulervei fordi det er nøyaktig to punkter av odde grad.



Lukket Eulervei fordi alle punktene har partalls grad.