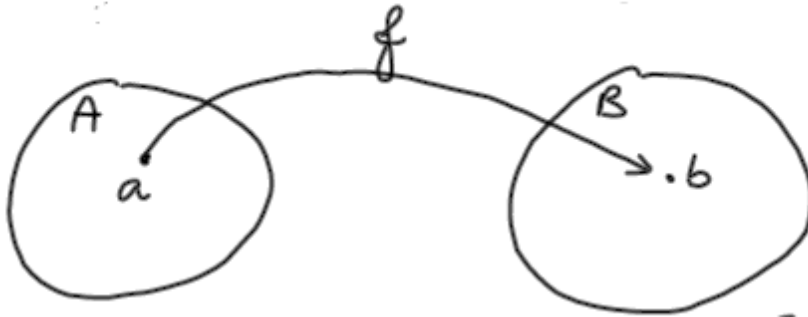


Funksjoner

La A og B være to mengder.

En funksjon f fra A til B betegnes med $f:A \rightarrow B$ og er en tilordning (regel) som *til ethvert element $a \in A$ tilordner ett og bare ett element $b \in B$* . Elementet b kalles funksjonsverdien til a og vi skriver $f(a) = b$.

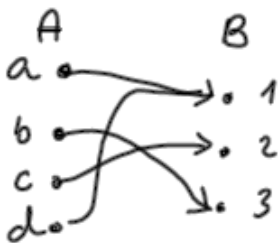


Eksempel

La $A = \{a, b, c, d\}$ og $B = \{1, 2, 3\}$

La f være gitt ved: $f(a) = 1, f(b) = 3, f(c) = 2, f(d) = 1$.

Dette kan illustreres slik:



OBS! For at det skal være en funksjon **må** det gå en pil fra hvert eneste element i A til et element i B . Men det kan ikke gå to eller flere piler fra noe element i A !

I B kan det være elementer som ikke blir truffet av noen pil og/eller elementer som blir truffet av flere piler.

Mengden A kalles for funksjonens *definisjonsmengde* (eng: *domain*) og mengden B kalles funksjonens *verdiområde* (eng: *codomain*).

Mengden $f(A)$ er mengden av funksjonsverdier $f(a)$ og kalles funksjonens *verdimengde* (eng: *range*) V_f og er definert ved:

$$f(A) = \{f(a) \mid a \in A\} = V_f$$

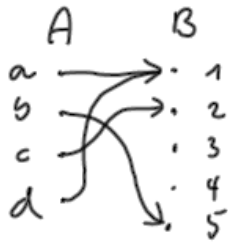
Uformelt kan vi si at verdimengden V_f til f består av de elementene i B som blir truffet av minst én pil.

Verdimengden er en delmengde av verdiområdet, dvs. $V_f \subseteq B$

Eksempel.

$A = \{a, b, c, d\}$ og $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

La f være definert ved: $f(a) = 1$, $f(b) = 5$, $f(c) = 2$, $f(d) = 1$.



Definisjonsmengden til f er A .

Verdiområdet til f er B .

Verdimengden til f er $\{1, 2, 5\}$

$V_f = \{1, 2, 5\} \subseteq B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Egenskaper ved en funksjon

En-til-en (eng: on-to-one)

$f: A \rightarrow B$ er *en-til-en* hvis ingen elementer i A har samme funksjonsverdi, dvs.

Hvis $a \neq b$ så er $f(a) \neq f(b)$

Eller omvendt: Hvis $f(a) = f(b)$, så er $a = b$.

Uformelt kan vi si at f *en-til-en* hvis ingen elementer i B blir truffet av mere enn én pil.

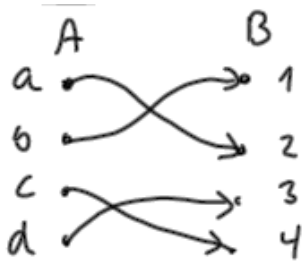
På (eng: onto)

En funksjon $f: A \rightarrow B$ er *på* hvis verdimengden V_f til f er lik B . Da gjelder at for alle $b \in B$ finnes det et element $a \in A$ slik at $f(a) = b$, dvs.

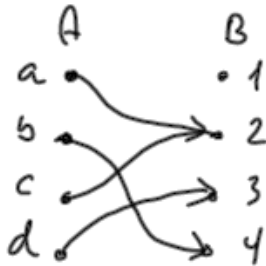
$\forall (b \in B) \exists (a \in A) (f(a) = b)$

Dette betyr at alle elementene i B blir truffet av en pil, og at verdimengden og verdiområdet er like, dvs. $V_f = B$.

Eksempel



Denne er både en-til-en og på fordi alle elementene i B blir truffet av en og bare en pil.

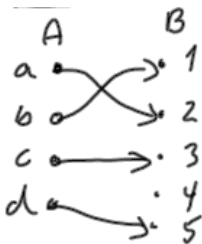


Denne er hverken en-til-en eller på. Funksjonen er ikke en-til-en fordi $f(a) = f(b) = 2$ (to piler inne til 2). Funksjonen er ikke på fordi $1 \notin V_f$, men er med i verdiområdet B. (1 blir ikke truffet av noen pil)

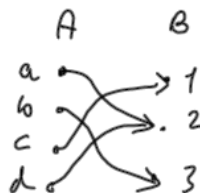
Observasjon: La $f: A \rightarrow B$.

- Hvis $|A| < |B|$, kan f ikke være på.
- Hvis $|A| > |B|$, kan f ikke være en-til-en.
- Hvis f skal være både en-til-en og på må $|A| = |B|$.

Eksempler



Denne er en-til-en, men ikke på



Denne er på, men ikke en-til-en

Andre navn

- En funksjon som er en-til-en kalles *injektiv*

- En funksjon som er på kalles *surjektiv*
- En funksjon som er både en-til-en og på kalles *bijektiv*

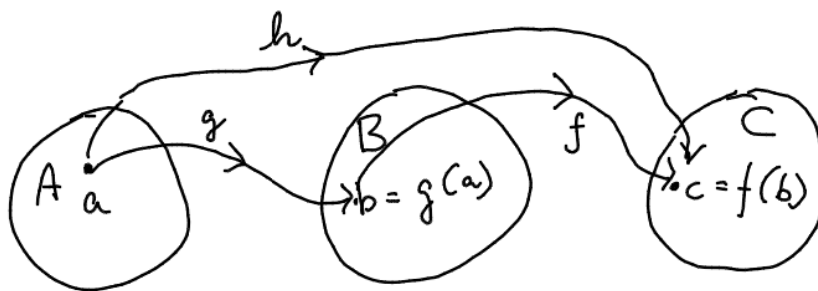
Sammensetningen av to funksjoner

Gitt mengdene A , B og C . La f og g være funksjonene der

$$g: A \rightarrow B$$

$$f: B \rightarrow C$$

Da kan vi lage sammensetningen h av f og g . Den betegnes som $h = f \circ g$ (lese som « f ring g »).



Sammensetningen $h = f \circ g$ er en funksjon fra A til C , $h: A \rightarrow C$

og er definert ved $h(a) = f(g(a))$

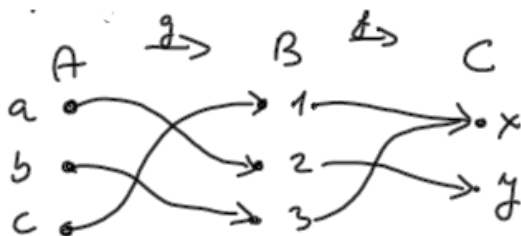
NB! $f \circ g \neq g \circ f$

Eksempel.

La $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ og $C = \{x, y\}$

La $g: A \rightarrow B$ være definert ved $g(a) = 2$, $g(b) = 3$, $g(c) = 1$.

La $f: B \rightarrow C$ være definert ved: $f(1) = x$, $f(2) = y$, $f(3) = x$.



La $h = f \circ g$.

Vi får:

$$h(a) = f(g(a)) = f(2) = y$$

$$h(b) = f(g(b)) = f(3) = x$$

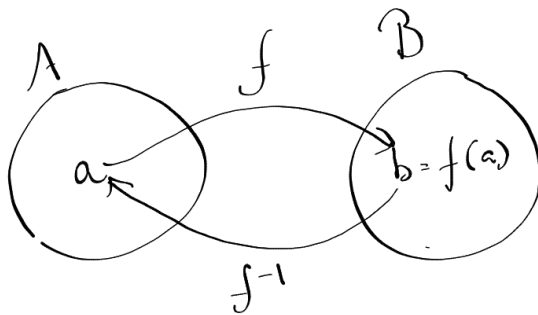
$$h(c) = f(g(c)) = f(1) = x$$

Inverse funksjoner

En funksjon som både er en-til-en og på har en invers funksjon.

La $f: A \rightarrow B$. Den inverse funksjonen til f er den funksjonen

$f^{-1}: B \rightarrow A$ som er slik at $f^{-1}(f(a)) = a$.



Den inverse funksjonen betegnes med f^{-1} .

Sammensetningen av den inverse funksjonen og f selv gir den innsatte verdien som funksjonsverdi.

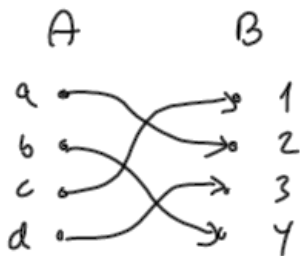
$$(f^{-1} \circ f)(a) = f^{-1}(f(a)) = f^{-1}(b) = a$$

Eksempel

$A = \{a, b, c, d\}$ og $B = \{1, 2, 3, 4\}$

La f være definert ved:

$$f(a) = 2, f(b) = 4, f(c) = 1, f(d) = 3.$$



Den inverse funksjonen f^{-1} til f er gitt ved

$$f^{-1}(1) = c, f^{-1}(2) = a, f^{-1}(3) = d, f^{-1}(4) = b.$$

Vi ser at $f^{-1}(f(a)) = f^{-1}(2) = a$

Vi ser også at f er den inverse funksjonen til f^{-1} :

$$f(f^{-1}(2)) = f(a) = 2$$

Husk: For at en funksjon f skal kunne ha en invers funksjon, f^{-1} , må den være både en-til-en og på.

Mer om funksjoner

En generell funksjon er på formen $f: A \rightarrow B$. Hvis både A og B er tallmengder, kaller vi f for en tallfunksjon. Følgende tallfunksjoner vil en kunne få bruk for i ulike datafag:

Funksjonssymbol	Funksjonsnavn
$f(x) = a$	Den konstante funksjonen
$f(x) = ax + b$	Den lineære funksjonen
$f(x) = ax^2 + bx + c$	Den kvadratiske funksjonen
$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$	Polynomfunksjonen av grad n
$f(x) = \sqrt{x}$	Kvadratrotfunksjonen
$f(x) = \log_2 x$	Logaritmefunksjonen med grunntall 2
$f(x) = \ln x$	Den naturlige logaritmefunksjonen
$f(x) = x \log_2 x$	Den lineæritmiske funksjonen (kalles også den loglineære funksjonen)
$f(x) = 2^x$	Ekspontialfunksjonen med grunntall 2
$f(x) = e^x$	Ekspontialfunksjonen med grunntall e
$f(x) = \lceil x \rceil$	Takfunksjonen (eng: ceiling)
$f(x) = \lfloor x \rfloor$	Gulvfunksjonen (eng: floor)

De
to

nederste funksjonene i tabellen er **avrundingsfunksjoner**.

Funksjonen tak (eng. ceiling)

La x være et desimaltall, dvs. $x \in \mathbb{R}$. Funksjonen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ ($\mathbb{R}$ er de reelle tallene og $\mathbb{Z}$ er de hele tallene) lik $f(x) = \lceil x \rceil$, er definert som *avrundingen av x oppover til nærmeste heltall*, uansett!

Hvis x er et heltall så er $\lceil x \rceil = x$

Symbolet $\lceil \cdot \rceil$ kalles for *tak* (eng. ceiling).

Eksempler.

La $f(x) = \lceil x \rceil$. Da blir

$$f(3,14) = \lceil 3,14 \rceil = 4$$

$$f(0,0001) = \lceil 0,0001 \rceil = 1$$

$$f(-1,1) = \lceil -1,1 \rceil = -1$$

$$f(-3) = \lceil -3 \rceil = -3$$

I Java har vi en tilsvarende funksjon:

```
double x = 3.14;           // x er et desimaltall
double n = Math.ceil(x);   //avrundingen
System.out.println(n);     // utskrift: 4.0
```

NB! I Java blir resultatet egentlig ikke et heltall, men et desimaltall der desimalene er «tatt vekk».

Funksjonen *gulv* (eng. *floor*)

Funksjonen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ lik $f(x) = \lfloor x \rfloor$, er definert som *avrundingen av x nedover til nærmeste heltall*, uansett!

Hvis x er et heltall så er $\lfloor x \rfloor = x$.

Eksempler

La $f(x) = \lfloor x \rfloor$. Da blir

$$f(3,14) = \lfloor 3,14 \rfloor = 3$$

$$f(0,0001) = \lfloor 0,0001 \rfloor = 0$$

$$f(-1,1) = \lfloor -1,1 \rfloor = -2$$

$$f(-3) = \lfloor -3 \rfloor = -3$$

Grafen til en funksjon

Gitt funksjonen $f: A \rightarrow B$. *Grafen til f* er den delmengden av $A \times B$ som er gitt ved

$$G_f = \{ (a,b) \mid a \in A, b = f(a) \}.$$

Grafen er med andre ord *en mengde av par*. Dette kan også illustreres ved et koordinatsystem.

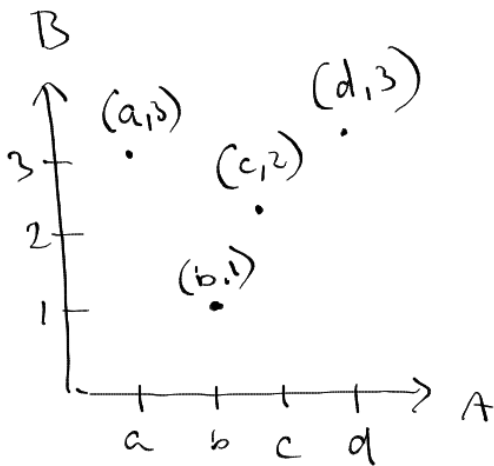
Eksempel

La $A = \{a, b, c, d\}$ og $B = \{1, 2, 3\}$

La f være definert ved

$f(a) = 3, f(b) = 1, f(c) = 2, f(d) = 3$.

Koordinatsystem:



$$G_f = \{ (a, b) \mid a \in A, b = f(a) \} = \{ (a, 3), (b, 1), (c, 2), (d, 3) \}$$

$$A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A \text{ og } b \in B \}$$

$$= \{ (a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3), (c, 1), (c, 2), (c, 3), (d, 1), (d, 2), (d, 3) \}$$

Vi ser at $G_f \subseteq A \times B$.