Følger

En *følge* (eng: *sequence*) er en oppramsing av tall. Hvert tall i oppramsingen har et nummer eller en posisjon som er bestemt av *hvor i følgen tallet står*. Det første tallet har vanligvis posisjonen 0 (også kalt nr. 0 eller indeks 0). [1]

Tallene i en følge kalles <u>*ledd*.</u> (eng. *term*)

En generell <u>endelig</u> følge kan settes opp slik:

$$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m, \ldots, a_N$$

a_0: første ledd; a_m: det generelle leddet; a_N: siste ledd

Denne følgen har N+1 ledd.

En generell uendelig følge kan settes opp slik:

$$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots,$$

a_0: første ledd; a_n: det generelle leddet; det finnes ikke noe siste ledd

En følge kan også skrives opp på kortform:

$\{a_n\}$, $n \geq 0$ eller eventuelt $\{a_n\}$, $n \geq 1$

Andre bokstaver enn n kan også brukes.

<u>Eksempler.</u>

$\{n^2\}, n \geq 0$ betyr $0, 1, 4, 9, 16, \ldots$

$\{\frac{1}{k}\}, k \geq 1$ betyr $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$

OBS! La alle a_n være tall fra en tallmengde S. Da kan følgen $\{a_n\}$, $n \geq 0$ sees på som en funksjon

$$f: \mathbb{N} \to S \qquad \text{(fra de naturlige tallene til S)}$$

der $f(n) = a_n$.

Dvs. når vi setter inn indeks *n* i funksjonen får vi det n'te tallet i følgen som funksjonsverdi.

[1] Enkelte ganger er det mer aktuelt å si at det første tallet har posisjonen/indeks/nr 1.

Tallene i følgene følger ulike mønstre. Disse kan være bygget opp på forskjellige måter, f.eks.

1, 3, 5, 7, ……

Her er differansen mellom hvert ledd det samme

1, 2, 4, 8, 16, 32, ….

Her ganges hvert ledd med samme faktor for å få neste ledd i følgen. Det betyr at forholdet (brøken) mellom et vilkårlig ledd og det foregående er en konstant: 16/8 = 8/4 = 4/2 = 2

Geometriske følger

En *geometrisk følge* er en følge der *forholdet (brøken) mellom et vilkårlig ledd og det foregående er en konstant*.

$$a_0,\ a_1 = a_0 \cdot k,\ a_2 = a_1 \cdot k,\ a_3 = a_2 \cdot k \ldots$$

Hvis a_n er det generelle leddet, betyr det at a_n/a_{n-1} er en konstant for alle $n \geq 1$.

<u>Eksempel 1</u>

Gitt følgen 1, 2, 4, 8, 16, ……

Vi ser at

2 = 2/1 = 4/2 = 8/4 = 16/8 osv.

Siden forholdet mellom et tall og det foregående tallet i følgen er en konstant, er dette en geometrisk følge.

<u>Eksempel 2</u>

Gitt følgen

$$1,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{16},\ \frac{1}{64},\ \frac{1}{256},\ \ldots$$

Vi ser at

$$\frac{\frac{1}{4}}{1} = \frac{1}{4},\quad \frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4},\quad \frac{\frac{1}{64}}{\frac{1}{16}} = \frac{1}{4}$$

Følgelig er dette en geometrisk følge.

Eksempel 3

Gitt følgen 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, ……

Vi ser at

4/1 = 4 mens 9/4 = 2,25.

Siden vi får forskjellige svar ($4 \neq 5$) er forholdet mellom leddene *ikke* en konstant og følgen er derfor *ikke* en geometrisk følge.

Generell formel for en geometrisk følge

La a være det første leddet i en geometrisk følge (dvs. $a_0 = a$) og r det faste forholdet mellom et ledd og det foregående leddet, dvs.

$r = a_n/a_{n-1}, n \geq 1$

Da vil det generelle leddet a_n i en geometrisk følge alltid være på formen

$a_n = ar^n$, $\mathbf{n \geq 0}$

Eksempler

La a = 1 og r = 2. Da blir $a_n = 2^n$, og vi får følgen
1, 2, 4, 8, 16, 32, …

La a = 2 og r = 3. Da blir $a_n = 2 \cdot 3^n$ og vi får følgen
2, 6, 18, 54, …

La a = 3 og r = -2. Da blir $a_n = 3 \cdot (-2)^n$. Det gir følgen
3, -6, 12, -24, …

NB! Når fortegnet til leddene i følgen skifter mellom positiv og negativ annenhver gang er må r være negativ!

Aritmetiske følger

En følge kalles en *aritmetisk følge* hvis *differensen mellom et vilkårlig ledd og det foregående leddet er en konstant*. Det betyr at hvis a_n er det generelle leddet, så er $a_n - a_{n-1}$ fast for alle $n \geq 1$. Avstanden mellom leddene er konstant.

Eksempel 1

Gitt følgen 2, 4, 6, 8, 10,…. (partallene)
Vi ser at 4 – 2 = 2, 6 – 4 = 2, 8 – 6 = 2 osv.
Siden differensen er den samme er dette en aritmetisk følge.

Generell formel for en aritmetisk følge

La a være det første leddet i en aritmetisk følge (dvs. $a_0 = a$) og d være den differensen mellom et ledd og det foregående leddet, dvs. $d = a_n - a_{n-1}$, $n \geq 1$

Da vil det generelle leddet a_n i en aritmetisk følge alltid være på formen:

$a_n = a + dn, n \geq 0$

I eksempelet over (2, 4, 6, 8, 10,….) er a = 2 og d = 2. Dermed blir $a_n = 2 + 2n$.

Eksempel 2

La a = 5 og d = 3. Da blir $a_n = 5 + 3n$ og vi får den aritmetiske følgen 5, 8, 11, 14, 17, 20, ….

Differensligninger

Noen følger er verken aritmetiske eller geometriske, men følger likevel et mønster. Slike følger kan defineres ved hjelp av *differensligninger* (eng. *reccurence relations*)

Et eksempel på en slik følge er:

$a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}$, $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $n \geq 2$

Ut fra denne definisjonen kan vi bestemme leddene i følgen:

$a_2 = 2 \cdot a_1 + 3 \cdot a_0 = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 4 + 3 = 7$

$a_3 = 2 \cdot a_2 + 3 \cdot a_1 = 2 \cdot 7 + 3 \cdot 2 = 14 + 6 = 20$

$a_4 = 2 \cdot a_3 + 3 \cdot a_2 = 2 \cdot 20 + 3 \cdot 7 = 40 + 21 = 61$

osv.

Slike følger skal vi studere nærmere i kapittel 8.

Det er mange typer følger som er av interesse i ulike datafag. Det er aritmetiske følger, geometriske følger og andre typer følger. Her er noen av de viktigste:

Det n-te leddet	De første leddene
n	$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \ldots$
n^2	$1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, \ldots$
n^3	$1, 8, 27, 64, 125, \ldots$
2^n	$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024$
3^n	$1, 3, 9, 81, 243, 729$
$n!$	$1, 2, 6, 24, 120, 720, 5040, \ldots$
Fibonacci-tallene	$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots$
$\left(\frac{1}{2}\right)^n$	$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \ldots$
$\frac{1}{n}$	$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \ldots$
$\frac{1}{n^2}$	$1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \frac{1}{36}, \ldots$