Ekvivalente utsagn

<u>Definisjoner</u>

Et sammensatt utsagn som ALLTID er SANT kalles for en TAUTOLOGI.

Et sammensatt utsagn som ALLTID er USANT kalles for en SELVMOTIGELSE eller en KONTRADIKSJON (eng. contradiction).

Eksempler:

Tautologi : $p \vee \neg p$

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
S	U	S
U	S	S

Selvmotsigelse: $p \wedge \neg p$

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$
S	U	U
U	S	U

To utsagn er EKVIVALENTE hvis de har samme sannhetsinnhold. Det betyr p og q er logisk like og at $p \leftrightarrow q$ alltid er sant. Dette betegnes med

$$p \equiv q$$

Vi kan bruke sannhetsverditabell til å avgjøre om to utsagn er ekvivalente. Hvis kolonnene for de to utsagnene er identiske, er utsagnene ekvivalente.

NB! To ekvivalente utsagn trenger ikke ha samme påstand, så lenge de har samme sannhetsverdi:

p: $2 > 3$ q: $3 > 4$

Siden p og q begge er usanne er de logisk ekvivalente.

<u>Eksempler</u>

La T stå for True (Sant) og F stå for False (Usant)

$p \wedge T \equiv p$ $p \vee T \equiv T$ $\neg p \vee p \equiv T$ $p \vee p \equiv p$

$p \vee F \equiv p$ $p \wedge F \equiv F$ $\neg p \wedge p \equiv F$ $p \wedge p \equiv p$

$\neg(\neg p) \equiv p$ $p \vee q \equiv q \vee p$ $p \wedge q \equiv q \wedge p$

<u>Unære og binære operatorer</u>

En unær operator har tar en operand.

Eksempel:

$$\neg p$$

operator operand

En binær operator tar to operander.

<u>Eksempel</u>

operator

$$p \wedge q$$

operander

Vi bruker parenteser for gruppere delutsagnene og derved vise hvilke operander som hører til hvilke operatorer.

<u>Eksempler</u>

$$\underbrace{(p \wedge q)}_{\text{operand}} \vee r$$

$$p \wedge \underbrace{(q \vee r)}_{\text{operand}}$$

****

Vi har forskjellig lover som kan brukes til å omgjøre og eventuelt forenkle sammensatte utsagn.

De Morgans to lover:

$\neg (p \lor q) \equiv \neg p \land \neg q$

$\neg (p \land q) \equiv \neg p \lor \neg q$

Bevis for $\neg (p \lor q) \equiv \neg p \land \neg q$:

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \lor q$	$\neg(p \lor q)$	$\neg p \land \neg q$
S	S	U	U	S	U	U
S	U	U	S	S	U	U
U	S	S	U	S	U	U
U	U	S	S	U	S	S

Siden de to siste kolonnene er like er

$\neg (p \lor q) \equiv \neg p \land \neg q$

Bevis for $\neg (p \land q) \equiv \neg p \lor \neg q$:

p	q	$p \land q$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg(p \land q)$	$\neg p \lor \neg q$
S	S	S	U	U	U	U
S	U	U	U	S	S	S
U	S	U	S	U	S	S
U	U	U	S	S	S	S

Siden de to siste kolonnene er like er

$\neg (p \land q) \equiv \neg p \lor \neg q$

Distributive lover:

$p \land (q \lor r) \equiv (p \land q) \lor (p \land r)$

$p \lor (q \land r) \equiv (p \lor q) \land (p \lor r)$

Bevis for

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

p	q	r	$p\wedge q$	$p\wedge r$	$q\vee r$	$p\wedge(q\vee r)$	$(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$
S	S	S	S	S	S	S	S
S	S	U	S	U	S	S	S
S	U	S	U	S	S	S	S
S	U	U	U	U	U	U	U
U	S	S	U	U	S	U	U
U	S	U	U	U	S	U	U
U	U	S	U	U	S	U	U
U	U	U	U	U	U	U	U

like kolonner.

På tilsvarende måte kan vi vise at

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

Men hvordan er det hvis det er den samme operatoren mellom alle de tre utsagnene?

p Λ (q Λ r) ?   eller   p V (q V r) ?

Når det er samme operator (dvs. Λ ELLER V) mellom alle delutsagnene spiller det ingen rolle hvor vi setter parentesene.

<u>Assosiativ lov:</u>

p Λ (q Λ r) ≡ (p Λ q) Λ r   p V (q V r) ≡ (p V q) V r

Tabeller over ekvivalenser hentet fra læreboken:

TABLE 6 Logical Equivalences.

Equivalence	*Name*
$p \wedge \mathbf{T} \equiv p$ $p \vee \mathbf{F} \equiv p$	Identity laws
$p \vee \mathbf{T} \equiv \mathbf{T}$ $p \wedge \mathbf{F} \equiv \mathbf{F}$	Domination laws
$p \vee p \equiv p$ $p \wedge p \equiv p$	Idempotent laws
$\neg(\neg p) \equiv p$	Double negation law
$p \vee q \equiv q \vee p$ $p \wedge q \equiv q \wedge p$	Commutative laws
$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$	Associative laws
$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	Distributive laws
$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$	De Morgan's laws
$p \vee (p \wedge q) \equiv p$ $p \wedge (p \vee q) \equiv p$	Absorption laws
$p \vee \neg p \equiv \mathbf{T}$ $p \wedge \neg p \equiv \mathbf{F}$	Negation laws

TABLE 7 Logical Equivalences Involving Conditional Statements.

$p \to q \equiv \neg p \vee q$

$p \to q \equiv \neg q \to \neg p$

$p \vee q \equiv \neg p \to q$

$p \wedge q \equiv \neg(p \to \neg q)$

$\neg(p \to q) \equiv p \wedge \neg q$

$(p \to q) \wedge (p \to r) \equiv p \to (q \wedge r)$

$(p \to r) \wedge (q \to r) \equiv (p \vee q) \to r$

$(p \to q) \vee (p \to r) \equiv p \to (q \vee r)$

$(p \to r) \vee (q \to r) \equiv (p \wedge q) \to r$

TABLE 8 Logical Equivalences Involving Biconditionals.

$p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$

$p \leftrightarrow q \equiv \neg p \leftrightarrow \neg q$

$p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$

$\neg(p \leftrightarrow q) \equiv p \leftrightarrow \neg q$