

Innføring i bevisteknikk

(Kun det som undervises på forelesningen er pensum. NB! Avsnitt 1.6 og 1.7 inngår ikke i pensum)

Et bevis går ut på å demonstrere at implikasjonen $p \rightarrow q$ er sann. p kalles for premissen og q kalles for konklusjonen. Det er nok å vise at hvis p er sann så er q sann.

Direkte bevis.

Vi antar at premissen er sann. Så bruker vi holdbare argumenter til å vise at da er også konklusjonen q sann.

Eksempel

La n være et naturlig tall.

Påstand: «Hvis n er et oddetall, så er n^2 et oddetall.»

p : n er et oddetall.

q : n^2 er et oddetall.

Bevis:

Hvis n er et oddetall kan n skrives som $2k + 1$, der k er et tall.

n^2 kan da skrives som

$$(2k + 1)^2 = (2k)^2 + 2 \cdot 2k \cdot 1 + 1^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1.$$

Vi ser at $2(2k^2 + 2k)$ må være et partall siden vi har 2 som faktor. Legger vi til 1 får vi et oddetall. Følgelig må n^2 være et oddetall. Det betyr at q er sann og påstanden er bevist.

Kontrapositivt bevis

Vi vet at $p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$.

Istedenfor å bevise at $p \rightarrow q$, viser vi at det kontrapositive utsagnet

$$\neg q \rightarrow \neg p$$

er sant. Vi starter med å anta at q er usann (dvs. $\neg q$ er sann). Så bruker vi holdbare argumenter til å vise at da må også p også være usann (dvs. $\neg p$ er sann).

Eksempel

La n være et naturlig tall.

Påstand: «Hvis n^2 er et oddetall, så er n et oddetall.»

p : n^2 er oddetall.

q : n er et oddetall.

Bevis:

Istedenfor $p \rightarrow q$, viser vi $\neg q \rightarrow \neg p$.

Anta at $\neg q$ er sant. Da er n ikke et oddetall, men et partall.

Vi skal vise at det gjelder også $\neg p$, dvs. at n^2 ikke er et oddetall, men et partall. Et partall kan skrives som $n = 2 \cdot k$. Da blir

$$n^2 = (2 \cdot k)^2 = 4k^2 = 2 \cdot 2k^2.$$

Vi ser at n^2 har 2 som faktor og følgelig må n^2 være et partall. Dermed har vi bevist at $\neg q \rightarrow \neg p$ som er ekvivalent med $p \rightarrow q$.

Bevis ved selvmotsigelse

Ut fra definisjonen av en implikasjon vet vi at det eneste tilfellet der implikasjonen er usann er når premissen er sann og konklusjonen er usann:

p	q	$p \rightarrow q$
S	S	S
S	U	U
U	S	S
U	U	S

Hvis vi antar at nettopp dette er situasjonen, altså at premissen p er sann og at konklusjonen q er usann, og kan vise at dette leder til en selvmotsigelse, har vi bevist at $p \rightarrow q$.

Ved å bruke holdbare argumenter slutter vi oss til noe som åpenbart er i strid med antagelsen vår og kan trekke den slutning at hvis p er sann så må q også være sann, dvs.

$$p \rightarrow q.$$

Eksempel

La n være et naturlig tall.

Påstand: «Hvis n^2 er et oddetall, så er n et oddetall.»

p : n^2 er oddetall.

q : n er et oddetall.

Vi antar at premissen p er sann og at konklusjonen q er usann.

Hvis q er usann må n være et partall. Et partall kan skrives som $n = 2 \cdot k$. Da blir

$$n^2 = (2 \cdot k)^2 = 4k^2 = 2 \cdot 2k^2.$$

Vi ser at n^2 har 2 som faktor og følgelig må n^2 være et partall. Dette strider mot antagelsen vår om at p er sann, dvs. at n^2 er oddetall.

Dermed har vi en selvmotsigelse. Følgelig kan q ikke være usann, men må være sann.

p	q	$p \rightarrow q$
S	S	S
S	U	U
U	S	S
U	U	S

Som vi ser av tabellen var dette det eneste tilfellet som kunne gjøre implikasjonen usann. Siden vi nå har vist at dette tilfellet ikke kan oppstå har vi vist at implikasjonen $p \rightarrow q$ er sann.